CLÁSICOS DE LA CIENCIA Y LA TECNOLOGÍA

Georg Cantor

FUNDAMENTOS PARA UNA TEORÍA GENERAL DE CONJUNTOS

Escritos y correspondencia selecta

EDICIÓN DE JOSÉ FERREIRÓS

CRÍTICA

Fundación IBERDROLA

Georg Cantor

FUNDAMENTOS PARA UNA TEORÍA GENERAL DE CONJUNTOS

CLÁSICOS DE LA CIENCIA Y LA TECNOLOGÍA

Georg Cantor

FUNDAMENTOS PARA UNA TEORÍA GENERAL DE CONJUNTOS

ESCRITOS Y CORRESPONDENCIA SELECTA

EDICIÓN DE JOSÉ FERREIRÓS

TRADUCCIÓN CASTELLANA DE
José Ferreirós y Emilio Gómez-Caminero

CRÍTICA
BARCELONA

Fundación
IBERDROLA

Colección dirigida por

José Manuel Sánchez Ron
Catedrático de historia de la ciencia (UAM)
y miembro de la Real Academia Española

Clásicos de la Ciencia y la Tecnología
es una colección coeditada con la Fundación Iberdola

Creative Commons

Quedan rigurosamente prohibidas, sin la autorización escrita de los titulares del *copyright*, bajo las sanciones establecidas en las leyes, la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo públicos.

Diseño de la cubierta: Jaime Fernández
Ilustración de la cubierta: © Enciclopèdia Catalana
Realización: Àtona, S.L.

© 2006 de la introducción, el epílogo y la anotación:
José Ferreirós
© 2006 de la presente edición para España y América:
Editorial Crítica, S. L.,
Diagonal, 662-664
08034 Barcelona

ISBN: 84-8432-695-0
e-mail: editorial@ed-critica.es
http://www.ed-critica.es
Depósito legal: M. 40.857-2005
Impreso en España
2006 – BROSMAC, S. L., Polígono Industrial 1, Calle C, Móstoles (Madrid)

NOTA PRELIMINAR

En la historia de la matemática, Georg Cantor (1845-1918) ocupa un lugar privilegiado, como responsable de una de las creaciones más sorprendentes y atrevidas en toda la historia de las matemáticas: los números transfinitos. Antes que él, el infinito era, por mucha que fuese su peculiaridad, más un objeto de reflexión filosófica que matemática. Al mostrar que existen diferentes tipos de infinito y que es posible clasificarlos, Cantor convirtió a este concepto, hasta entonces más intuitivo que cuantificable, en protagonista de una rama extraordinariamente activa y productiva de las matemáticas, y que fue, además, esencial en la «crisis de fundamentos» que se produjo a principios del siglo XX, crisis que protagonizaron, entre otros, David Hilbert, Ernst Zermelo y Kurt Gödel, y que revolucionó a las matemáticas. Como dijo Hilbert en 1925: «Del paraíso que Cantor nos creó, nadie podrá expulsarnos».

Y para acceder aunque sea a un pequeño rincón de ese paraíso, esta colección de «Clásicos de la ciencia y la tecnología» acoge un pequeño, pero muy selecto, conjunto de escritos de Cantor, no siempre fáciles, es cierto, pero sí fundamentales; incluyendo su decisivo Fundamentos para una teoría general de conjuntos *(1883), así como la célebre correspondencia que sostuvo con Richard Dedekind, complementada con algunas cartas que dirigió a Hilbert y a otros, una correspondencia que nos presenta de manera más directa resultados clave del gran matemático que pretende recordar y honrar el presente volumen, incluyendo su descubrimiento (c. 1897) de las paradojas de la teoría de conjuntos, que tan dramáticas consecuencias tendrían para las esperanzas de algunos matemáticos finiseculares.*

Cantor consiguió algo de lo que pocos en la historia del pensamiento científico, mejor, del pensamiento a secas, pueden presumir: que se pueda decir que debido a algunos de sus trabajos

(los que dedicó a los números transfinitos) se puede hablar de un antes y un después en la historia de la matemática, y del pensamiento filosófico también. Por ello, merece formar parte de ese reducido panteón en que yace la memoria de los científicos que modificaron radicalmente apartados básicos de nuestras formas de entender la naturaleza.

JOSÉ MANUEL SÁNCHEZ RON

INTRODUCCIÓN[1]

Los números transfinitos van a celebrar su 123 aniversario. El día 5 de noviembre de 1882, Georg Cantor escribía a su colega Richard Dedekind:

> Precisamente desde nuestros últimos encuentros en Harzburg y Eisenach [septiembre de 1882], Dios Todopoderoso me ha concedido alcanzar las aclaraciones más notables e inesperadas en la teoría de conjuntos y la teoría de números, o, más bien, que encontrara aquello que ha fermentado en mí durante años y que he estado buscando tanto tiempo.[2]

La carta de la que se extrae esta cita es, junto a otras dirigidas a Mittag-Leffler,[3] nuestro más antiguo testimonio del genial nacimiento. O quizá, siguiendo a Cantor, deberíamos decir que se trataba del «descubrimiento» de los números ordinales transfinitos, que aquél, como escriba y fiel intérprete de Dios o la Naturaleza, no hacía sino recibir y copiar de la voz revelada.[4]

El resultado fue una de las más grandes invenciones de la imaginación matemática, comparable en este sentido a «obje-

1. Agradezco al profesor Ignacio Jané sus valiosos comentarios a la primera redacción de este trabajo, a Alejandro Garciadiego su ayuda y comprensión, y a José M. Sánchez Ron el estímulo para impulsar la publicación del libro.

2. *Briefwechsel Cantor-Dedekind*, ed. E. Noether y J. Cavaillès (Paris, Hermann, 1937), 55. Indiquemos ya aquí que hay dos obras a las que nos referiremos mediante abreviatura: *Abhandlungen* remite a las obras de Cantor editadas por Zermelo (1932); *Briefe* es la edición de sus cartas (1991) por Meschkowski y Nilson.

3. Del 17 y el 25 de octubre del mismo año. Ver *Briefe*, 88-91.

4. Véanse los *Beiträge* de 1895 (en *Abhandlungen*, 282), de donde tomamos todas esas expresiones.

tos» o ideas del calado de los números reales y los complejos. Cantor pertenece al reducido grupo de matemáticos que han establecido ideas y demostraciones tan originales e impactantes por su resultado, como simples por el método. David Hilbert daba cuenta de ello con una anécdota notable que ofreció a la hija del matemático, recién fallecido éste:

> Precisamente hace unos días tuve ocasión de experimentar la intensidad con la que obran las teorías de su padre sobre una naturaleza congenial. Al visitar a Einstein en Berlín le expuse el clásico procedimiento con el que su padre ha demostrado la imposibilidad de «enumerar» los números irracionales, etc. Y Einstein, que todo lo capta enseguida, estaba totalmente subyugado por lo magníficos que son esos pensamientos.[5]

Este resultado de 1874, pero sobre todo la gran invención cantoriana de los números transfinitos, abrieron el camino al célebre paraíso que predicó Hilbert:

> Queremos investigar cuidadosamente, siempre que exista la menor perspectiva de éxito, las construcciones conceptuales y formas de inferencia fructíferas, para cultivarlas, afianzarlas y hacerlas susceptibles de aplicación. Del paraíso que Cantor nos creó, nadie podrá expulsarnos. (Hilbert 1926, 376-377.)

El nacimiento de los números transfinitos llegó, como veremos, unido a un auténtico terremoto en la trayectoria y el pensamiento de Cantor. Atreverse a enumerar y contar lo infinito representaba un paso muy arriesgado, con claras implicaciones filosóficas, contraviniendo múltiples advertencias previas. Algunos se habían anticipado con la admonición de que «someter» lo infinito a tratamiento numérico constituiría un claro caso de anatema. El matemático ruso-alemán fue consciente de todo ello, y decidió afrontar los riesgos con arrojo, tomando —por decirlo al modo ibérico— el toro por los cuernos.

5. Carta de Hilbert a Else Cantor, escrita tras la muerte de éste el 6 de enero de 1918, citada por Meschkowski (1983, 176). La demostración se expone en el artículo de 1892 traducido más abajo. Digamos de paso que Einstein aún no era la celebridad internacional y popular que pronto devendría.

Así surgió un texto único en la historia de las matemáticas, una mezcla inigualable de saber matemático y erudición histórico-filosófica, de riquísimas ideas nuevas y declaraciones de principios, de filosofía matemática y matemática filosófica. Para marcar la importancia del escrito, Cantor no se contentó con publicarlo en forma de quinta entrega de una serie de artículos en los *Mathematische Annalen*, sino que lo hizo editar separadamente en Leipzig bajo los auspicios del célebre editor Teubner.

En este volumen, el mencionado texto de Cantor forma el centro, pero viene acompañado por algunos otros artículos y cartas que ayudarán al lector a formarse una imagen global de Cantor y su genial contribución. Las páginas que siguen no tienen otra intención que acompañar a sus hermosos textos, facilitar en lo posible su lectura, y justificar algunos rasgos de la traducción que ofrecemos, primera que se publica en esta lengua.

1. EL CONTEXTO DE LOS *FUNDAMENTOS*, O LA GÉNESIS DEL «PARAÍSO»

Aunque la placa colocada en 1970 en la casa de Halle donde habitó Georg Cantor le califique de «fundador de la teoría de conjuntos», lo cierto es que no era el único —ni el primer— autor que investigaba cuestiones relacionadas con los conjuntos en las décadas de 1870 y 1880. En conexión con el análisis y los conjuntos de puntos trabajaban P. du Bois-Reymond, U. Dini, J. Harnack y otros; en álgebra, teoría de números algebraicos y fundamentos estaban también las contribuciones de R. Dedekind, sólo o con H. Weber; y pronto vendrían las de G. Peano. Si las contribuciones de Hankel, Du Bois-Reymond, Cantor y otros impulsaron la introducción de conceptos conjuntistas en el análisis, Dedekind desempeñó un papel muy especial en la configuración y fundamentación de un *estilo conjuntista* dentro de la matemática moderna, no sólo en análisis sino también en el álgebra y la teoría de números.[6] Pero, aunque hubiera una cier-

6. En su obra, ya en 1871, se encuentra una serie de rasgos clave de este estilo: el énfasis en el concepto más abstracto de función o aplicación (empleando isomorfismos, homomorfismos, automorfismos); la aceptación plena del infinito

Cantor hacia 1870, cuando era un joven profesor recién llegado a Halle.

ta sensación de convergencia e incluso de competencia, algunos rasgos diferenciaban netamente las preocupaciones de Cantor respecto a los demás autores.

Todos esos matemáticos estaban directamente motivados por problemas del análisis, del álgebra, o de alguna rama en desarrollo de la matemática pura, pero Cantor encaminaba sus pasos hacia cuestiones más especulativas. Buscaba aclaraciones acerca del infinito en acto, de su filosofía y sus matemáticas, de cómo está constituido el universo de los conjuntos infinitos; aclaraciones acerca de lo que es el continuo —no una función continua, sino un continuo de números o de puntos— porque pensaba que sin ellas resulta imposible entender la realidad física; y buscaba particularmente aclaraciones acerca del cruce entre ambos campos de problemas: la Hipótesis del Continuo. Ningún otro matemático le acompañó, por entonces, en la investigación de cuestiones tan abstractas como esa última o como la teoría de los números transfinitos.

Todo había comenzado diez años antes de la publicación de los *Fundamentos*. Es verdad que Cantor había introducido ya algún concepto conjuntista en un artículo sobre cuestiones del análisis (series trigonométricas) publicado en 1872. Pero el acta de nacimiento de la teoría de conjuntos transfinitos lleva fecha del 7 de diciembre de 1873, cuando logró demostrar en

---

actual en matemáticas; el empleo característico de demostraciones puramente existenciales, no constructivas; y la caracterización axiomática de los sistemas o «estructuras» matemáticas. Sobre este tema, véase Dedekind (1998) y Ferreirós (1999), que conviene complementar con el artículo de W. Sieg y D. Schlimm, «Dedekind's analysis of number: Systems and axioms», de próxima publicación en *Synthese*. El lector consultará también con provecho la reciente traducción de Dedekind, *Theory of Algebraic Numbers* (Cambridge University Press, 2004).

una carta a Dedekind que el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales no puede ponerse en correspondencia biunívoca con el conjunto $\mathbb{N}$ de los naturales: $\mathbb{R}$ es un conjunto *no-enumerable*, en expresión que él mismo acuñó unos años más tarde. Este resultado llevó a su autor a la conclusión de que cabe establecer distinciones entre los infinitos: lejos de lo que pensara la tradición, hay diversos «tamaños» u «órdenes» del infinito, diversas *cardinalidades* como decimos hoy.

Al publicar ese llamativo teorema en 1874, por respeto a las advertencias de su maestro Weierstrass y quizá de Kronecker, Cantor apenas se atrevió a incluir una breve indicación de la posibilidad de establecer tales distinciones. El concepto general de *potencia* o *cardinalidad* de un conjunto sólo quedó definido en 1878, en un artículo que demostraba la existencia de correspondencias biunívocas entre $\mathbb{R}$ y cualquier espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ (véase la correspondencia con Dedekind de 1877). Dos conjuntos A y B tienen *la misma cardinalidad*, ambos son *equipotentes*, si y solo si existe una aplicación *f* de A en B que es biyectiva (esto es, una correspondencia uno-a-uno entre los elementos de A y los de B). Por ejemplo, el conjunto de los números enteros es equipotente a $\mathbb{N}$: basta pensar en los enteros reordenados del siguiente modo: 0, 1, –1, 2, –2, ... (esto da idea de cómo definir la aplicación biyectiva *f* que se necesita); y ya antes de 1870 había demostrado Cantor que, sorprendentemente, el conjunto $\mathbb{Q}$ de las fracciones o números racionales también es equipotente a $\mathbb{N}$.

Ese resultado fue expuesto por Cantor, al parecer, en el seminario de Weierstrass en Berlín hacia 1868. En una carta escrita años después Cantor explica que, a fin de comprobar que los números racionales positivos son enumerables, basta ponerlos en el orden siguiente:[7]

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \frac{1}{5}, \frac{5}{1}, \frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{5}{2}, \frac{6}{1}, \ldots$$

Esto es, se toman las fracciones m/n, m'/n' en su forma irreducible, y se ordenan de manera que la primera vaya antes o des-

7. Cantor a Goldscheider, 18 de junio de 1886. Citada en Meschkowski (1983), 27.

pués de la segunda según que $m + n$ sea menor o mayor que $m' + n'$; en cuanto a las fracciones para las que $m + n = m' + n'$, se ordenan de menor a mayor numerador.[8]

Estudiando conjuntos de puntos en la recta (o lo que viene a ser lo mismo, subconjuntos de $\mathbb{R}$) y en el espacio, todos los ejemplos que Cantor había podido considerar durante los años 1870 le enfrentaban, o bien con conjuntos *enumerables* —equipotentes a $\mathbb{N}$—, o bien con conjuntos equipotentes a $\mathbb{R}$. El conjunto de los números racionales, el de los números algebraicos, y muchos de los conjuntos de unicidad que Cantor había considerado hacia 1872 (en sus célebres investigaciones acerca de series trigonométricas) son enumerables. En el artículo de 1878 conseguía demostrar que el conjunto de los números irracionales es equipotente a $\mathbb{R}$, y también —por increíble que parezca— el conjunto de los puntos del espacio $\mathbb{R}^n$ es equipotente a $\mathbb{R}$. Un segmento cualquiera, un cuadrado, un cubo, y un cubo de n dimensiones[9] ¡tienen todos ellos exactamente el mismo número de puntos! (Se trata, obviamente, de un «número transfinito».)

Cantor se atrevió pues a conjeturar la justamente famosa *Hipótesis del Continuo*:

> A través de un proceso inductivo, en cuya exposición no entraremos aquí, se hace plausible la proposición de que la cantidad de clases de conjuntos lineales que surgen aplicando este principio de clasificación es finita, y precisamente igual a dos.[10]

El principio de clasificación mencionado no es otro que formar clases de equipotencia: poner los subconjuntos de $\mathbb{R}$ que son

8. Es notable que, vista desde un punto de vista superior, la sucesión anterior sigue una ley muy elegante. Las distintas secciones en que se divide la sucesión (con $m + n$ = cte. = l) guardan relación con la función $\varphi(l)$ que da la cantidad de números primos relativos a l. La sección l-ésima tiene $\varphi(l+1)$ miembros, y los numeradores son los distintos números primos relativamente a $l+1$ en orden creciente, los denominadores esos mismos números en orden decreciente.

9. O para el caso —como también demostraba Cantor— de infinitas dimensiones, siempre que sea un infinito enumerable.

10. *Abhandlungen*, 132. Cantor usa «conjuntos lineales» para referirse a subconjuntos de $\mathbb{R}$.

equipotentes entre sí en una misma clase. Acabamos de leer la Hipótesis del Continuo —en adelante, HC— en su versión más débil, restringida al caso de los números reales: todo subconjunto de $\mathbb{R}$ será, o bien enumerable, o bien de la potencia del continuo.

Esta cuestión tan especulativa, decidir la verdad o falsedad de la HC, se convirtió a partir de entonces en el centro de los afanes de Cantor, el norte de su atrevida incursión en el laberíntico universo de los conjuntos transfinitos. Dado que bastaba investigar las potencias que pueden encontrarse entre los «conjuntos lineales», pues al considerar subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ no encontraremos representantes de nuevas potencias, Cantor comenzó a publicar en los *Mathematische Annalen* (bajo los auspicios del conocido matemático Felix Klein, actuando como editor) una serie de artículos titulados «Sobre variedades de puntos lineales e infinitas» —donde una «variedad» no es otra cosa que un conjunto—. El quinto y más importante número de esta serie fueron justamente los *Grundlagen*.

El año 1882 resultó especialmente notable en la producción científica de Cantor: fue su *annum mirabilis*, a los 37 de edad. Las dos primeras entregas de «Sobre variedades de puntos» no ofrecían grandes novedades, pero en 1882 Cantor redactó tres nuevas entregas en las que se encontraban resultados muy novedosos, entremezclados con reflexiones acerca de la teoría de conjuntos, su papel en la matemática y sus implicaciones. La serie se cerraría en 1884, con un artículo donde se demostraba el teorema de Cantor-Bendixson y la equipotencia entre los conjuntos perfectos y el continuo. Con estos resultados, la HC quedaba demostrada para una amplia clase de conjuntos de puntos: los llamados conjuntos *cerrados*, que contienen todos sus puntos de acumulación.[11]

Un rasgo que determina el carácter de los *Fundamentos* es la urgencia con la que Cantor redactó la obra. Las fechas, por cierto, pueden resultar muy confusas al lector no avisado: a la vista de las dos versiones del trabajo se pensaría que todo el texto (con las notas) estaba listo ya en octubre, y que en Navidades

11. Sobre este tema puede verse Ferreirós (1999). Una buena historia del Problema del Continuo puede encontrarse en G. H. Moore (1989).

el autor añadió un prefacio para la edición separada que publicaría Teubner en Leipzig a comienzos de 1883.[12] Pero sabemos por las cartas que Cantor enviaba a Klein y Mittag-Leffler que la realidad no fue ésa: la fecha que lleva el artículo impreso, octubre, es simplemente la del momento en que «Dios Todopoderoso» tuvo a bien que Cantor encontrara «aquello que ha fermentado en mí durante años y que he estado buscando tanto tiempo».

Inmediatamente, y de manera febril, se puso a perseguir las implicaciones de la nueva idea, que consistía en concebir los transfinitos como «verdaderos números», tan reales como los enteros, y agrupados además en «clases numéricas». Una larga y dedicada ocupación con la teoría de conjuntos había puesto en sus manos copiosos materiales matemáticos y filosófico-científicos que ahora podían ser corregidos, aumentados y puestos en perspectiva. De octubre hasta finales de diciembre, Cantor fue redactando el cuerpo principal del trabajo; las notas parecen haber sido añadidas a lo largo de enero de 1883. El 7 de febrero enviaba a Felix Klein los últimos retoques y le pedía que aceptara la obra entera en su revista, a pesar de la fuerte presencia de contenidos filosóficos.[13]

Sabiendo que el volumen de los *Mathematische Annalen* tardaría unos pocos meses en aparecer, la urgencia que Cantor sentía le impulsó a emprender una publicación separada como librito, arrostrando los costes correspondientes. Estas prisas en la elaboración y publicación se traslucen en algunas imperfecciones del escrito, tanto en lo relativo a la elección de terminología, como en la presentación de algunos conceptos. Un buen ejemplo es la prolija definición de los conjuntos bien ordenados (§ 2 de la obra).

El motivo de publicar separadamente los *Fundamentos* resulta claro, y lo indica el propio Cantor: la importancia del es-

12. El prefacio que se encontrará luego dice «Navidades de 1882», y el artículo que apareció en *Mathematische Annalen* lleva al final de todo, tras las notas, la fecha «octubre 1882».

13. *Briefe*, 113. El 5 de enero de 1883 enviaba a Mittag-Leffler unas pruebas de imprenta que no incluían las secciones 7, 9 y 10 —aunque las menciona como si estuvieran ya redactadas— ni tampoco las notas, que ni siquiera menciona (*Briefe*, 109; las notas en pruebas se las envió el 6 de febrero, p. 112).

crito, su carácter verdaderamente fundamental, pues representa nada menos que el momento de madurez y autonomía de la teoría de conjuntos transfinitos. Por eso, la nueva entrega a los *Annalen* era mucho más que la quinta parte de una serie de artículos. Pero esto no basta para explicar la urgencia sentida por su autor. Las sensaciones de urgencia o de serenidad tienen mucho que ver, qué duda cabe, con la personalidad de cada cual. De manera que el tema nos lleva al dominio de lo privado: a la vida de Cantor.

2. UN ESBOZO BIOGRÁFICO[14]

Cantor no era un autor pausado y clásico, al estilo de Gauss o Dedekind; lejos de él quedaba el lema gaussiano «Pauca sed matura» [pocas obras, pero maduras]. Si, como dijo el noruego Abel, Gauss era un zorro que esconde cuidadosamente sus huellas, ya que la versión escrita de sus resultados no daba ninguna pista sobre el proceso heurístico seguido, las huellas del proceso creativo de Cantor están a nuestra disposición y bien visibles en sus artículos. Era un hombre muy temperamental, con un carácter más cercano al del artista, romántico e impulsivo. Por muchas razones nos recuerda a aquellos románticos de la *Naturphilosophie* [filosofía de la naturaleza] idealista.

Georg fue hijo de un corredor de comercio adinerado de origen danés, y una madre ruso-alemana aficionada al arte y la música. Nació el 3 de marzo de 1845 en San Petersburgo, pero once años después el padre se retiró de sus pingües negocios en la casa «Cantor & Co.» por mala salud, y la familia se trasladó a Frankfurt. Tras asistir Cantor a una escuela de formación profesional, su vocación matemática triunfó y el padre otorgó el necesario permiso. Georg le escribió en esta ocasión:

14. Para conocer en detalle su biografía, pueden consultarse las exposiciones de Herbert Meschkowski *(1981 y 1983)* o la de Walter Purkert y H. J. *Ilgauds (1987); en castellano existe una biografía de Joseph Dauben publicada* por *Investigación y Ciencia,* y el capítulo correspondiente del libro de Jesús Mosterín, *Los lógicos* (Madrid, Espasa, 2000).

> ¡Mi querido papá! Ya puedes imaginarte cuánto me ha alegrado tu carta; ella determina mi futuro. ... Espero que aún tendrás ocasión de vivir alegrías a mi costa, querido padre, ya que mi alma y todo mi yo viven en mi vocación; lo que el hombre quiere y puede, aquello a lo que le conduce una voz desconocida y misteriosa, ¡*eso* lo llevará adelante![15]

Una cuestión que se ha discutido a menudo acerca del matemático es si era de origen judío, y el hecho de que empleara la primera letra hebrea, alef (ℵ), para los cardinales transfinitos ciertamente ha estimulado el debate. En la época nazi se investigó el asunto, pero un funcionario de Copenhague aseguró que en las actas disponibles no constaban antepasados judíos de los Cantor.[16] Desde luego, aplicando ideas rabínicas estrictas, Cantor no era judío, ya que su madre era católica y el padre había sido bautizado luterano. Pero las leyes raciales nazis eran más estrictas: ¡bastaba con tener un abuelo judío de nacimiento!

Meschkowski (1983, 235), de acuerdo con un descendiente del propio Cantor, opina que «obviamente» el certificado expedido en Copenhague no es concluyente, aduce que algunos funcionarios bienintencionados protegían a los encausados, y añade que la hija mayor de Cantor, Else, reconocida maestra de canto, fue excluida del *Reichmusikkammer* por orígenes no arios. El hecho de que la familia de la mujer de Cantor, los Guttmann, estuviera explícitamente ligada a la causa de la integración de los judíos también es relevante. Pero, sobre todo, Cantor no escondió sus orígenes a amigos y colegas. El documento principal es una carta al matemático francés e historiador Paul Tannery, que además de zanjar la cuestión incluye otra información de interés:

> Mi difunto padre, muerto en Alemania el año 1863, *Georg Woldemar Cantor*, vino de niño a *San Petersburgo* con su madre y fue *bautizado* allí como *luterano*. Pero había nacido en *Copen-*

15. Citada en Meschkowski (1983), 5. El tono romántico del joven Cantor (17 años) reflejaba el estilo de su padre; en 1861, éste le había escrito (*ibid*): «Cuida y cultiva el amor a las ciencias tanto como el fuego sagrado de las vestales, cuya llama ardiente no debía nunca apagarse. Mas la llama eterna de la ciencia, que nunca se extinguirá, es un fuego aún más sagrado que aquél...».

16. Grattan-Guinness (1971).

hague (no sé con seguridad en qué año, entre 1810 y 1815) de *padres israelitas*, pertenecientes a la *comunidad judía portuguesa* allí establecida, y que por tanto eran con suma probabilidad de origen hispano-portugués.

Mi madre, Marie Cantor, nacida Böhm, que vive ahora y desde 1863 en Berlín, es petersburguesa de nacimiento, pertenece a una familia católica romana procedente de *Austria*.

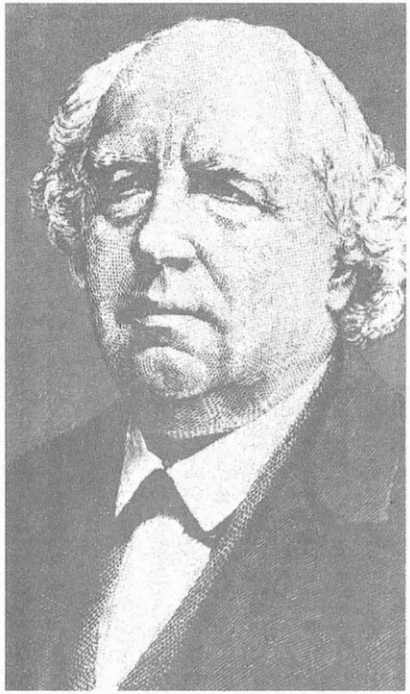
Mi abuelo por parte materna Franz Böhm fue maestro concertista del emperador de Rusia y *virtuoso del violín* en San Petersburgo; también su mujer, mi abuela Maria Böhm, nacida *Morawek*, era *virtuosa violinista*.

Un hermano de mi abuelo fue el maestro de conciertos *vienés Joseph Böhm*, fundador de una famosa escuela de violinistas, de la que han surgido muchos grandes virtuosos como *Joachim*, *Ernest*, etc.[17]

Cantor estuvo siempre muy orgulloso de estas conexiones artísticas en su familia, así como del carácter verdaderamente cosmopolita y multi-religioso de sus orígenes. Algunos comportamientos y aficiones suyos, que enseguida veremos, adquieren contornos nuevos al ser juzgados a esta luz. Además, Cantor consideraba que él mismo estaba dotado de un verdadero temperamento artístico.

Los estudios universitarios, comenzados en Zurich, se desarrollaron principalmente en Berlín. Por esa época, la ciudad prusiana no sólo se convertiría en capital del Reich, sino que también se convertía en la meca de la matemática europea, bajo la dirección de Kummer y Weierstrass. Georg fue uno de los primeros —y uno de los más grandes— discípulos de esta escuela enormemente influyente. La escuela de Berlín representaba la orientación enormemente purista, y muy rigurosa, de la matemática alemana en la época. Destacó sobre todo en el campo del análisis, y fue célebre especialmente por las lecciones de Weierstrass, verdadero maestro de la escuela.

17. Carta del 6 de enero de 1896. Publicada en P. Tannery, *Memoires Scientifiques: Correspondance*, ed. A. Dies, J.-L. Heiberg y H.-G. Zeuthen, vol. XIII (Paris: Gauthier-Villars, 1934). Agradezco a las discusiones del foro *Historia Matematica*, coordinado por Julio González Cabillón, el cómodo acceso a esta carta.



Ernst E. Kummer (1810-1893) y Carl Weierstrass (1815-1897), los dos profesores que impulsaron la enseñanza de las matemáticas en la Universidad de Berlín.

Aunque Cantor dedicó sus trabajos de doctorado y habilitación a la teoría de números, sus primeros grandes trabajos vinieron precisamente en el mundo del análisis. En 1870 demostró, en colaboración con Heine, que una serie trigonométrica convergente representa una *única* función de variable real. En 1872 publicó un importante artículo en el que extendía ese resultado a series trigonométricas que no convergen en ciertos «conjuntos de unicidad» infinitos. Tales conjuntos quedaban caracterizados con precisión mediante el concepto de *conjunto derivado*,[18] y todo el asunto daba pie a que Cantor presentara su célebre definición de los números reales (que simplifica la definición dada por Weierstrass en sus lecciones).

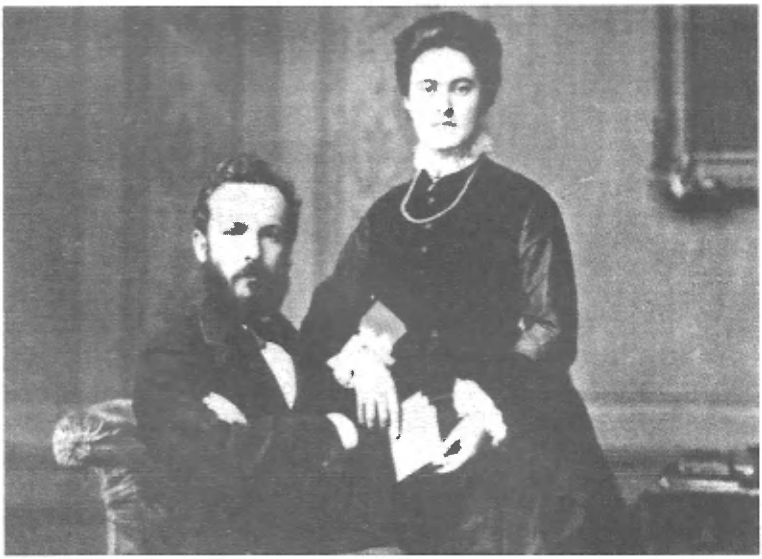
Para entonces, y ya desde 1869, Cantor era profesor en la Universidad de Halle, que había tenido un pasado importante, pero cuyo presente era de segundo nivel. Cantor aspiró enseguida a ocupar un puesto de mayor nivel, en Gotinga o en Berlín, pero sus intentos en esa dirección fracasaron y tuvo que contentarse con permanecer de por vida en aquel destino «provisional» (como profesor «ordinario» desde 1879). Fue uno de los tantos desengaños que sufrió, y que aprendió a ver como decisiones de la divinidad. Y es que su destino —llegó a pensar— no era convertirse en un científico poderoso, sino algo de mucho mayor calado: desvelar la verdadera naturaleza del infinito, y abrir con ello nuevos campos a la matemática, la ciencia, la filosofía y la teología. Nada menos.

Un detalle poco llamativo de su trabajo de 1872 merece mayor discusión: Cantor lo publicó en los *Mathematische Annalen*, y no en el célebre *Journal de Crelle* editado por los berlineses. El detalle parecerá sin importancia a quien no conozca la época, pero es sumamente revelador del temperamento rebelde de nuestro hombre. Las escuelas matemáticas alemanas operaban como grupos de influencia bastante cerrados, y los *Annalen* eran precisamente el órgano de expresión de la escuela de Clebsch, enfrentada con la de Berlín.

18. Dado un conjunto de puntos P, $P \subset \mathbb{R}$, su conjunto derivado P' consta de todos los puntos de acumulación de P (el teorema de Bolzano-Weierstrass asegura la existencia de P' si P es infinito y acotado). Como en general P' es infinito, la operación puede iterarse definiendo P'', ..., P^n, ... e incluso P^∞.

El espíritu de libertad intelectual que Cantor ponía de manifiesto aquí se expresaba también en sus trabajos. En el campo del análisis, todo el final del siglo XIX alemán estuvo atravesado por la división entre los seguidores de Weierstrass, partidarios del rigor a toda costa, y los partidarios de Riemann, motivados por la búsqueda de conceptos matemáticos nuevos y muy preñantes (aunque ello les llevara a caminar por sendas nuevas, donde las vías del rigor no estaban claras). Es característico de la contribución de Cantor a las series trigonométricas que combinaba métodos de Riemann y de Weierstrass, desarrollándolos de manera precisa y moderna. Esta tendencia continuó en los años siguientes, y Cantor se alejó cada vez más de la ortodoxia weierstrassiana, siguiendo la vía que condujo a la matemática más moderna.

Precisamente en 1872 Cantor conoció por casualidad, durante las vacaciones de verano, a Richard Dedekind (1831-1916), discípulo aventajado de Riemann y proponente radical de concepciones muy modernas, proto-estructuralistas, pero a la vez rigurosas. En aquel entonces las ideas conjuntistas de



Cantor con su mujer Vally, durante los años 1870.

Dedekind estaban muy avanzadas, y las dos mentes encontraron amplias zonas de contacto, entrando rápidamente en sinergia. Lástima que muy poco más tarde, en 1874, surgieran dificultades de relación que impidieron una colaboración estrecha entre los dos padres de la matemática conjuntista.[19] De todos modos, la correspondencia entre Cantor y Dedekind, que el lector o lectora encontrará traducida, ha quedado como testimonio célebre del nacimiento de la teoría de conjuntos entre 1872 y 1882.

Richard Dedekind (1831-1916), importante corresponsal de Cantor e impulsor de la matemática conjuntista.

En 1874, Georg se casó con Vally Guttmann, una mujer cuyas inclinaciones artísticas casaban bien con las del propio Cantor. La había conocido a través de su hermana Sophie, y era especialmente aficionada a la música: había aprendido canto y piano, al parecer con gran rendimiento. La afición de Vally por la música y el arte, su espíritu alegre, fueron un complemento importante al aire serio de Georg y determinaron el ambiente en la casa, donde —como era entonces natural para un Herr Professor alemán— se llevaba una activa vida social. Con ella tuvo seis hijos, cuatro niñas y dos niños. Es importante mencionar que Vally perdió pronto a sus padres y se crió en casa de su hermano mayor, el doctor Paul Guttmann, que fue director del Hospital Municipal de Moabit en Berlín.[20] En este hospital trabajaban muchos médi-

19. El lector podrá juzgar por sí mismo esas dificultades sobre la base del material que traducimos. En caso de que necesite ayuda adicional, le remitimos a Ferreirós (1993). Véase también Dedekind (1997).

20. Los moabitas eran una tribu judía que, según el *Génesis* 19, 30-38, tuvo su origen cuando las hijas de Lot, sobrino de Abraham, embriagaron a su propio padre y durmieron con él. Es famosa la estela de Moab, losa del siglo IX a.e.c., por ser uno de los primeros textos escritos con caracteres he-

cos y enfermeras judíos, que naturalmente fueron víctimas del nazismo desde 1933. Los Guttmann no eran judíos, pero obviamente eran favorables a la integración plena de los judíos; Paul realizó algunos trabajos sobre malaria y tuberculosis con el célebre médico judío Paul Ehrlich.

Fue en aquel mismo año de 1874 cuando se publicó, en el *Journal* de Berlín (también llamado «de Crelle» por el nombre de su fundador Leopold Crelle), la demostración de que el conjunto de los números reales *no es* enumerable, mientras que el conjunto de los números algebraicos sí lo es. Cantor concluía de sus argumentos en dichas demostraciones que todo intervalo de $\mathbb{R}$ contiene números transcendentes, dando así una nueva demostración del teorema de Liouville. A esto siguió en 1878, mediando de nuevo una fructífera discusión con Dedekind, el artículo que demostraba la equipotencia entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$, que acababa con la conjetura de la hipótesis del continuo HC (ver más arriba).

A partir de aquí, Cantor decidió emplear los conceptos conjuntistas de que disponía (cardinalidad, conjunto derivado, y alguna noción topológica) de manera combinada para atacar la HC y demostrarla. Esto le permitiría estudiar la topología de los conjuntos de puntos y sus cardinalidades, y así se vio conducido a los grandes resultados de los años 1880. En particular, se vio llevado al teorema de Cantor-Bendixson, y el esfuerzo por demostrarlo le condujo de la mano hacia los números ordinales transfinitos.

Hay motivos para pensar que, por estos años, Cantor se sentía inmerso en una competencia con otros matemáticos (Dedekind, Du Bois-Reymond) por la elaboración y publicación de la teoría de conjuntos. Esto explica también buena parte de la urgencia que sentía por publicar. Pero, además, hay otra hipótesis respecto a los motivos de su prisa que resulta inevitable. En la primavera de 1884, una negra noche se cernió sobre él: fue la primera crisis maníaco-depresiva que sufrió, manifesta-

---

breos. Sin embargo, el nombre del hospital viene de la zona de Berlín donde estaba situado, y al parecer fue un nombre que le dieron los hugonotes de origen francés que allí se asentaron, de manera que la conexión con los judíos es menos directa de lo que pudiera parecer.

ción de una enfermedad que le acompañaría el resto de sus días, especialmente en los años finales, a partir de 1900. Pero ya en 1884 cambió su modo de comportarse, su relación con los colegas de profesión, e incluso su caligrafía. Este tipo de problemas tienen causas endógenas, y suelen tener manifestaciones suaves mucho antes de las crisis severas. La urgencia y el nerviosismo que experimentaba Cantor ante la publicación de sus escritos —ya desde 1878— pueden ser una manifestación inicial de ese temperamento «nervioso» que acabó resultando enfermizo.[21]

Como irá intuyendo el lector, la personalidad de Cantor era llamativa: un hombre de gran intensidad, muy inteligente, de comentarios explosivos, a quien el rigor matemático no coartó un ápice su libertad de pensamiento, sus ansias especulativas. Un colega suyo en Halle, el matemático Heine, comentó ya hacia 1870 que «este Cantor» llegaría a hacer algo grande, porque en él se combinaban «una agudeza inusual y una fantasía realmente extraordinaria».[22] Todo ello venía acompañado por su gran figura, su voz profunda, su manera de hablar imponente (véase la anécdota al final de la sección 6), su gran energía y su afición a discutir asuntos matemático-científicos de noche o de día. Schoenflies, que le conoció bien en persona, escribe:

> Quien haya experimentado sólo una vez el atractivo de la personalidad de Cantor, sabe que estaba llena de agudeza y de temperamento, de ingenio y originalidad; era fácilmente tendente a la explosión, y se alegraba francamente de las propias ocurrencias.[23]

En otro lugar expone una de esas «explosiones»: la anécdota de cómo Cantor, llevado por la intensidad de su entusiasmo por la teoría de conjuntos, llegó tan de mañana al hotel donde se hospedaban Hilbert y Schoenflies, que tuvo que esperarles muchí-

21. Lo mismo sucede con otros rasgos de su comportamiento: las maniobras desacostumbradas (y sin duda perjudiciales para él mismo) que realizó buscando obtener una plaza en Berlín en 1875, y quizá también algunos aspectos de su comportamiento para con Dedekind.

22. Citado en Purkert e Ilgauds (1987, 33).

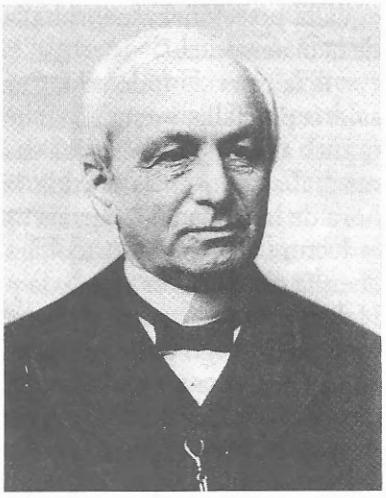
23. A. Schoenflies, «Die Krisis in Cantor's mathematischem Schaffen», *Acta Mathematica* 50 (1927, 1). La anécdota siguiente viene de «Zur Erinnerung an Georg Cantor», *Jahresber. der DMV* 31 (1922, 100-101).

Baruch Spinoza (1632-1677), el célebre filósofo judío, de origen hispanoportugués, que inspiró a Cantor desde su juventud.

simo tiempo en la sala de desayunos, para al fin hablarles sobreexcitado, «como él era» (al menos en sus años tardíos), y presentarles «una nueva refutación» de un supuesto resultado que contradecía una de sus creencias más firmes.

Ya en sus años de estudiante sentía pasión por la metafísica, sobre todo la del filósofo racionalista judío Spinoza. Esto es muy indicativo, y no sólo por la cuestión religiosa y los orígenes peninsulares del gran filósofo: según Spinoza la realidad entera está transida de infinito; todo fenómeno real (incluyéndome a mí y a usted misma, lectora) es una manifestación particular de la única sustancia real, *Deus sive Natura*, Dios o la Naturaleza. Estas ideas salen a la luz en los *Fundamentos* de 1883.

También fue hacia 1870 cuando Cantor sintió interés por la tradición teológica católica, con motivo del Concilio Vaticano, a pesar de haber sido criado como protestante. Más tarde se escribiría con teólogos y con cardenales, en una muestra más de aquella rebeldía frente a las escuelas establecidas que demostró con sus publicaciones (ver arriba) y que compartía con Spinoza. Incluso llegaría a redactar una carta para convencer al mismísimo Papa de la bondad y la necesidad de sus teorías sobre el infinito. Pero esto no le impidió publicar interpretaciones poco ortodoxas acerca de José de Arimatea como verdadero padre de Jesús (negando así el dogma de la inmaculada concepción, defendido entonces tanto por católicos como por evangélicos). Quizá detrás de este interés por los pensadores católicos y judíos había también un componente importante de curiosidad por los propios orígenes (recordemos que su madre nació católica y su padre, de creer a Cantor, judío).



Leopold Kronecker (1823-1891), amigo y colaborador de Kummer y Weierstrass, fue miembro de la Academia de Ciencias berlinesa y sólo en 1883 fue investido catedrático. También pasó de ser un apoyo de Cantor en su juventud, a tornarse su mayor enemigo.

Los años intermedios de la década de 1880 fueron tan ricos en ideas y resultados como en experiencias difíciles. Los matemáticos de Berlín se habían ido haciendo más y más influyentes, pero el audaz Cantor se había enemistado con antiguos amigos íntimos, sobre todo H. A. Schwarz. Leopold Kronecker era cada vez más influyente en los círculos de poder de la capital del Segundo Reich. Sus opiniones determinaban las ideas de numerosos matemáticos alemanes, además de armonizar con las opiniones de algunos de los franceses más influyentes, y cada vez hablaba más abiertamente en contra de las ideas de Cantor, al que llegó a llamar corruptor de la juventud. Conviene advertir que años atrás, en los 1870, ambos habían tenido buena relación y colaboración;[24] Cantor probablemente había puesto muchas esperanzas en el apoyo de los influyentes berlineses. El enfrentamiento posterior no fue un simple asunto de voluntad de poder, sino que Kronecker se había convertido en partidario radical del constructivismo en matemáticas, mientras Cantor se había ido desviando más y más de

24. Claros ecos de esta relación aparecen en la carta de Kronecker a Cantor, agosto de 1884. Es probable que la amargura de Cantor por el desencuentro se viera incrementada por el hecho de tener ambos orígenes judíos, lo que ciertamente unía en la sociedad de Berlín del momento (y excluía también de ciertos ambientes, como la aristocracia de los *Junkers*). Kronecker era hijo de un rico hombre de negocios y ejerció como tal por unos años, antes de establecerse en Berlín; vivió como judío hasta los sesenta años, en 1883, momento en el que su conversión coincidió con el nombramiento de profesor de la Universidad de Berlín.

aquella posición: comenzaba la disputa sobre los fundamentos de la matemática.

A la vista de todo ello, Cantor se convenció de que nunca saldría de Halle, y empleó su herencia en construir —al fin, tras quince años— una hermosa casa propia. (Allí pasaba largas horas trabajando en la surtida biblioteca, donde a primerísima hora de la mañana —dormía apenas seis horas— se dedicaba a la lectura de filósofos, teólogos y literatos.) Pero su inmensa energía exigía hacer algo, y la primera iniciativa fue convertir a Halle en un nuevo centro matemático que rivalizara con Berlín. La ocasión llegó en 1881, cuando la muerte de su buen colega Heine dejó una plaza vacante. Cantor hizo todo lo posible por convencer a Dedekind de que aceptara esa plaza; juntos, debió pensar, podían irradiar las ideas modernas y la teoría de conjuntos a toda Alemania, al mundo.[25] Pero Dedekind rechazó la oferta, quizá movido en parte por temor al temperamento inestable de su colega, pero también por arraigo a su ciudad natal y su familia, con la que vivía su contemplativa vida de soltero en una situación muy cómoda. Una nueva frustración, a la que Cantor respondió desarrollando el sentimiento de que la comunidad matemática alemana le había cerrado sus puertas.

Afortunadamente, el matemático sueco Mittag-Leffler estaba poniendo en marcha la nueva revista *Acta Mathematica* y contó con Cantor para los primeros números. La relación entre ambos comenzó con intensidad y Mittag-Leffler desplazó a Dedekind como corresponsal privilegiado, pero la situación no duraría.

La acumulación de sinsabores y el enfrentamiento con Berlín, que Cantor vivía en primera persona y desde una posición débil, acabarían haciendo mella en él. Kronecker era un hombre de opiniones fuertes y no perdía la ocasión de expresarlas. Por estos años, ello le condujo a un desagradable enfrentamiento con su viejo amigo Weierstrass[26] y al debate polémico con

25. No hemos incluido las numerosas cartas que Cantor y Dedekind se cruzaron al respecto: véase el libro de Dugac (1976, 239-251).

26. Sobre este asunto puede verse, entre otros, el artículo de Bölling (1997, 71), donde se cita una carta de Weierstrass a Sofia Kowalewskaya en la que dice que Kronecker (y Fuchs también) «trabajan contra mí», el primero de ellos «con plena conciencia e intención».

Dedekind, su principal rival en el campo de la teoría de números y la geometría algebraica. Las ideas especulativas de Cantor se convirtieron en uno de sus principales objetos de crítica y mofa, especialmente en conversaciones privadas. Una persona más equilibrada que Cantor habría juzgado la situación de otra manera y habría sabido dar tiempo al tiempo. Pero nuestro hombre estaba hecho de otra pasta.

Como el lector o lectora verá, los *Fundamentos* incluyen más de una pulla dirigida contra la visión de Kronecker: por primera vez salía a la luz, aunque velado, un debate que hasta entonces se había mantenido en privado. El mandarín de Berlín se fue convirtiendo en su «bestia negra», y en 1884 Cantor tomó la decisión arriesgada de incomodarlo postulándose ante el ministerio para una cátedra en la capital. Entretanto, Kronecker solicitaba a Mittag-Leffler que *Acta Mathematica* dejara de ser órgano de expresión para las ideas enfermizas del nuevo análisis, y le prometía un artículo crítico en el que mostraría la inanidad de esos conceptos.

Cantor acabó cediendo a la tensión, a la que también debió contribuir su intensísimo ritmo de trabajo: de mayo a junio de 1884 desarrolló su primera crisis grave, con un período de fuerte depresión. Cuando la crisis cedió, aconsejado por su mujer y su médico, realizó un intento de reconciliación con Kronecker que dio lugar a las interesantes cartas que recogemos. El berlinés, todo hay que decirlo, reaccionó de manera honesta y elegante; cabe pensar que, además de padecer engreimiento y un cierto autoengaño, fruto de su excesiva influencia y poder, Kronecker simplemente no había medido el efecto que sus declaraciones podían tener en la personalidad del antiguo alumno.

Continuaremos revisando la biografía de Cantor en el apartado 5, pero antes debemos atender a las características de los *Fundamentos* de 1883.

3. EL DOMINIO DE LO TRANSFINITO

Como ya he dicho, *Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre* es un trabajo quizá único en la historia de la matemática. Su riqueza en contenido matemático es indudable, y en este sentido se trata de una obra clave de Cantor, escrita en ple-

na madurez. Pero, como reconocía el propio autor en su correspondencia con Gösta Mittag-Leffler, el mismo contenido podía haberse comunicado en un trabajo mucho más corto (eliminando al menos 4 de las 14 secciones del escrito, así como las notas). Con esto se habría perdido buena parte de su encanto e interés, que se encuentra en la mezcla profunda y densa del material matemático con discusiones filosóficas y científicas.

La decisión de introducir los números transfinitos, la necesidad de justificar ese paso no sólo por razones técnicas o pragmáticas, sino también desde un punto de vista fundamental, llevaron a Cantor a ofrecer al público una nueva visión de sí mismo y de la naturaleza de su obra. Puede decirse que los *Grundlagen* constituyen una auténtica *confesión* del autor, que se quita la máscara de matemático estrictamente profesional, mantenida en todos sus artículos anteriores, y se revela como un hombre de talante muy especulativo. Las revelaciones contenidas en los *Fundamentos* plantean incluso problemas de interpretación del conjunto de la obra de Cantor.

Ese carácter de confesión filosófico-científica se muestra de diversos modos. En el tono de urgencia y gravedad que adopta Cantor ya en las primeras frases del trabajo, y que reaparece una y otra vez a lo largo del escrito. En las frecuentes referencias a Aristóteles, a los escolásticos, pero muy en particular a Leibniz y Spinoza. En las críticas, breves pero duras, a la concepción newtoniana y kantiana de la naturaleza y del conocimiento humano. En los latinajos que salpican la obra y contaminan la selección de terminología técnica, como se advierte sobre todo en el original alemán:

> ...dass es nach dem Endlichen ein *Transfinitum* (welches man auch *Suprafinitum* nennen könnte), d.i. eine unbegrentzte Stufenleiter von bestimmten Modis giebt, die ihrer Natur nach nicht endlich, sondern unendlich sind...

Aquí (*Fundamentos*, § 5) hace su primera aparición el término «transfinito», que Cantor todavía no usará sistemáticamente; la palabra aparece en latín, junto a «suprafinitum» y «modis», rodeada de citas latinas y de referencias a la tradición aristotélico-escolástica.

Lo mismo se trasluce, también, en la rica y compleja interrelación entre el texto principal y las notas al final originales. Digamos ya que estas *anotaciones* (como las llamaremos siempre) ofrecen claves importantísimas para comprender sus concepciones fundamentales. Las tres últimas contienen material matemático de gran importancia, añadido sin duda a vuelapluma cuando ya estaba compuesto el texto principal. Pero las primeras ofrecen aclaraciones sobre el concepto de conjunto, sobre filosofía de la matemática, sobre posibles aplicaciones científicas de las nuevas ideas, sobre la influencia de Platón, Leibniz y Spinoza, sobre la relación entre lo transfinito y el Absoluto divino.

3.1. Los *Fundamentos* ofrecen una nueva conceptualización del infinito. La idea de que es posible establecer gradaciones y distinciones en lo infinito era una novedad radical, en un campo que por su larguísima tradición y gran importancia parecía ya agotado. Ya hemos visto que esta idea comenzó a asentarse con la demostración, en el artículo de 1874, de que el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales es no-enumerable. Cantor pasó pronto a considerar las *potencias* o cardinalidades como gradaciones en lo infinito, pero sólo conocía dos de ellas (HC). En los *Fundamentos* dio con la manera de establecer una enorme mejora al respecto, creando una estructura fina para tales gradaciones.

La polémica sobre el infinito se retrotrae a los orígenes de la filosofía y la matemática, con las célebres paradojas de Zenón y las consideraciones de Aristóteles sobre el infinito actual y el potencial. Con su radical negación de la existencia de un infinito actual o en acto (que Cantor llamará infinito *propio*), y su afirmación del infinito potencial (*impropio*), Aristóteles estableció una posición muy coherente con la cosmovisión griega, que dejó una prolongada secuela histórica. Pero la polémica había continuado a lo largo de las disquisiciones escolásticas sobre filosofía y teología. Las discusiones clásicas en torno al infinito no se limitan a la cuestión de la aceptabilidad del concepto, ni a si puede concebirse un número infinito. En juego estaba también la infinitud de Dios o incluso del alma, así como las cuestiones de si el mundo está compuesto de infinitas partes, y si es infinito en su extensión espacial o temporal.

Esos problemas, y otros puramente matemáticos, procedían a fin de cuentas del intento de conceptualizar rigurosamente la noción del *continuo*, esa «madre de todas las batallas» en torno a los fundamentos de la matemática. Desde el **18** estuvo planteada la gran incógnita de hasta qué punto las cantidades infinitamente grandes (∞) o infinitamente pequeñas (dx) eran imprescindibles para el desarrollo del cálculo y el análisis. Con la rigorización del análisis en términos de límites, épsilons y deltas (siglo XIX), esos problemas quedaban aparentemente superados, pero sólo al precio de *presuponer* como dado el conjunto de todos los números reales, un infinito actual. Cantor y otros dieron definiciones satisfactorias de los números reales (*Fundamentos*, § 9), pero estas definiciones sólo pueden formularse dentro de una teoría de conjuntos infinitos.

A menudo se ha ofrecido una reconstrucción histórica terriblemente simplista, según la cual la prohibición aristotélica habría permanecido en pleno vigor —al menos entre los matemáticos— hasta que Cantor defendió el infinito como algo plenamente aceptable en matemáticas. En varios lugares me he ocupado de ofrecer evidencia en contra de esa simplificación.[27] Mientras las discusiones se plantearon en los términos de si es posible una cantidad o un número infinito, hubo mucha confusión;[28] pero la cosa cambió cuando se empezó a pensar en términos de conjuntos. Esto último sucedió hacia 1850, y los nombres que es imprescindible mencionar son los de Bolzano y Dedekind; de ambos tiene cosas que contarnos Cantor en los *Grundlagen*.

Cantor logra ofrecer una argumentación sumamente rigurosa y aclaratoria en torno a lo infinito y al continuo. Son muchas las cosas que allí se dicen, por ejemplo las incisivas consideraciones que permiten dar de lado a las paradojas elaboradas por los filósofos en el intento de demostrar que no hay números

27. Especialmente en mis libros *El nacimiento de la teoría de conjuntos* (Madrid, UAM, 1993) y *Labyrinth of Thought* (Ferreirós 1999).

28. Incluso Leibniz, partidario radical del infinito actual, dio argumentos para mostrar el carácter contradictorio del concepto de «número o cantidad infinita».

infinitos. Pero no se trata aquí de repetir las ideas que expresa con tanta claridad en el texto, sino de enfatizar la importancia y las implicaciones de alguna de ellas.

En una consideración retrospectiva, tienen especial importancia los comentarios que realiza Cantor —§ 5 y anotación 2— al distinguir dos géneros de infinitud (propia o actual) muy diferentes. Es un punto en el que sus ideas matemáticas entroncan de manera al parecer indisoluble con consideraciones teológicas, lo que resulta incómodo para muchos lógicos y matemáticos. Tradicionalmente se ha identificado el infinito actual con Dios, de manera que más allá de lo finito estaba ya el absoluto. Cantor, en cambio, propone un esquema tripartito: *finito*, *transfinito*, *absolutamente infinito*, siendo estos dos últimos los dos géneros de infinitud que mencionábamos. Esta posición se encuentra desarrollada en detalle en el artículo de 1886 que hemos traducido. En conexión con el problema de las paradojas (que discutiremos en la sección 7), es importante resaltar que años más tarde Cantor se vería forzado a cambiar un elemento sutil pero importante de esa posición filosófica: tras descubrir los argumentos concretos que dan lugar a las paradojas conjuntistas, tuvo que admitir que el infinito absoluto no es *actual*, sino *potencial*.[29]

Pero volvamos a 1883 y la distinción primitiva entre dos infinitos actuales. Esa distinción permitía salir al paso de una objeción de origen filosófico-teológico contra la matemática transfinita. La identificación tradicional del infinito con Dios sugería que, al someter a consideración matemática el infinito actual, estaríamos tratando de «determinar» lo divino mediante nuestros conceptos. Y los teólogos medievales, cristianos o no, habían afirmado que a Dios sólo cabe representarlo mediante atributos negativos (diciendo por ejemplo que es infinito, intemporal, o que su poder no conoce ningún límite —la omnipotencia se entiende también como un predicado negativo—). Determinar a Dios de manera positiva, digamos, asignando un número transfinito a su poder, sería una terrible herejía.

Cantor se toma esta cuestión con toda seriedad, y elude la objeción señalando que el dominio transfinito *no agota* el infi-

29. Como establece detalladamente Jané (1995).

nito actual. No debe nunca identificarse lo transfinito con lo Absoluto. Los transfinitos son más parecidos a lo finito, en la medida en que admiten plena determinación y son caracterizables por el pensamiento humano. Lo Absoluto elude en cambio toda determinación: lo divino puede a lo sumo reconocerse, pero nunca conocerse; lo Absoluto está estrictamente más allá de lo transfinito. (Años más tarde, cuando cambia de posición respecto a lo absolutamente infinito, Cantor podrá insistir en ese mismo argumento con mayor razón.)

Desde el punto de vista de la lógica y la matemática, lo más llamativo es que esta posición de Cantor le permitió estar preparado para dar una respuesta positiva a las célebres contradicciones o paradojas de la teoría de conjuntos. La conexión es la siguiente. En las anotaciones, Cantor señaló que los números transfinitos nos llevan más y más lejos, indefinidamente, conduciéndonos a cardinalidades infinitas cada vez mayores. No hay un máximo en la progresión de los ordinales, ni en la de las potencias, por lo que debe decirse que la «totalidad» de los números transfinitos (y la de las potencias) son de carácter absolutamente infinito. Por eso son un símbolo adecuado de Dios pero, inversamente, la indeterminabilidad de Dios habrá de aplicarse también a esas totalidades absolutamente infinitas: la colección de «todos» los ordinales transfinitos, como la de «todas» las potencias (o cardinales transfinitos), ya no son comprensibles para el pensamiento matemático. Retomaremos este tema en la sección 4.

3.2. Hay otro elemento especulativo en los *Grundlagen* que resulta sumamente llamativo. Por primera vez en su carrera, Cantor pone sobre el tapete una serie de cuestiones en torno a la concepción del mundo físico, y manifiesta su convicción de que la teoría de conjuntos se convertirá en instrumento fundamental de un cambio en la «metafísica». Aquí empleo esta palabra, como él, para referirme a cuestiones ontológicas acerca de *lo que hay* en el mundo y de cuáles son los principios básicos que lo rigen. Si nos tomamos en serio los *Fundamentos* —y su autor nos invita a ello continuamente—, hay que pensar que estas aplicaciones metafísicas le importaban tanto o más que las propiamente matemáticas.

La cuestión aparece en el § 5 y en las anotaciones 2, 5, 6 y 7; aparece también en el § 8, una sección clave sobre filosofía y metodología de la matemática. Los problemas principales que preocupan a Cantor en estos párrafos pueden clasificarse en cuestiones epistemológicas (de teoría del conocimiento) y cuestiones «metafísicas». En el § 5, habla de manera clara y decidida en contra de la *concepción mecanicista* de la naturaleza, defendida por la gran mayoría de sus contemporáneos científicos, comenzando por figuras de la talla de Hermann von Helmholtz. En su opinión, esa concepción debe ser complementada —o incluso sustituida— por una *concepción orgánica*, lo que constituye una clara toma de posición en contra del reduccionismo físico-químico habitual entre sus contemporáneos. La adecuada comprensión de los fenómenos de la vida y de los fenómenos mentales *exige*, cree Cantor, principios nuevos.

Si el mecanicismo ha contado desde tiempos de Newton con el potente apoyo del cálculo matemático, Cantor cree que las nuevas ideas conjuntistas van a convertirse en instrumento clave para el organicismo. Sus planteamientos a este respecto parecen concordar, en cuanto a dirección esencial, con las ideas defendidas un siglo más tarde por un René Thom. Y no deja de resultar notable que puedan advertirse conexiones entre esa convicción y alguna de las cuestiones «lógico-matemáticas» que Cantor trata en su trabajo: concretamente, su manera de enfocar la definición del continuo (*Fundamentos*, § 10).[30]

Varios de los trabajos publicados por Cantor en la década de 1880, a partir de los *Fundamentos*, vuelven sobre la idea de que los conjuntos transfinitos están representados en la naturaleza física y en la mental. Y esto no se encuentra sólo en artículos filosóficos, sino de manera especial en los que preparó para *Acta Mathematica*. En 1885 proponía un refinamiento conjuntista de la hipótesis del éter (esencial en la física de entonces): las partículas de éter constituirían un conjunto con la potencia del continuo, mientras que las de materia atómica formarían un

30. Me refiero a que el nivel de generalidad que busca para la definición de lo que es un continuo resulta adecuado al objetivo de aplicar dicha noción a los cuerpos orgánicos que se encuentran en la naturaleza.

conjunto enumerable.[31] Es en conexión con todo este complejo de ideas que adquieren sentido las numerosas referencias de Cantor a filósofos como Platón, Spinoza y Leibniz, y también sus críticas a Kant.

Las ideas metafísicas de Cantor se quedaron en meras sugerencias, y desde luego no tuvieron ningún impacto sobre la física y la biología de su tiempo. Pero esto no obsta para que debamos preguntarnos si, entre los motivos que le llevaron a desarrollar la teoría de conjuntos de puntos y la de conjuntos transfinitos, no se encontrarían desde el principio los planteamientos especulativos que afloran por primera vez en los *Fundamentos*.[32]

3.3. La problemática que se plantea Cantor es un caso típico de matemática *pura*, o mejor purísima. Al decir «pura» nos referimos a que los problemas abordados no provienen de otras ciencias relacionadas, sino que surgen en el proceso interno de desarrollo del propio conocimiento matemático, como resultado de o en conexión con soluciones obtenidas para problemas anteriores. El concepto de los números reales surge en un intento de analizar la idea del continuo, que resulta muy útil para la comprensión de procesos físicos; pero cuando nos planteamos la cuestión de cuál es la cardinalidad o potencia del conjunto de los reales, estamos ante una pregunta intramatemática o «pura». Hay mucha evidencia de que los problemas que preocupaban a Cantor eran *tan* puros y abstractos, que sus propios colegas —a los que los historiadores no dudan en calificar como matemáticos puros— no veían el sentido de sus investigaciones.

Eso nos consta por muchas de las reacciones registradas de autores importantes de la época. Vale la pena ver algún ejemplo. En 1883, varios grandes matemáticos franceses, del entorno de Charles Hermite, estuvieron ocupados revisando las traducciones de artículos de Cantor que aparecerían ese año en *Acta Ma-*

31. *Abhandlungen*, 275-276. Se trata de un trabajo publicado en *Acta Mathematica* (1885) y Cantor proponía también una partición de esos dos conjuntos que, especulaba, podría estar relacionada con distintos fenómenos y formas de energía.

32. Véase mi artículo «The motives behind Cantor's set theory» (2004), o la exposición más breve en (2003).

thematica. Tras haber discutido algunos de esos trabajos con sus colegas, Hermite escribe a Mittag-Leffler en abril de 1883:

> La impresión que las memorias de Cantor hacen en nosotros es desastrosa. Leerlas nos parece a todos una completa tortura. ... Nos ha sido imposible encontrar, entre los resultados que pueden entenderse, uno solo que tenga un *interés real y presente*.

Y esta crítica la aplica a la demostración de que $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$ son equipotentes. Según cuenta Hermite, Émile Picard ha leído los *Grundlagen* «sin cesar de maldecir al autor», y sólo Poincaré, «si bien juzga [dichas ideas] muy prematuras en el estado actual del análisis, cree como Ud. que tienen importancia».[33]

He aquí la opinión de Henri Poincaré acerca de los *Fundamentos*:

> El señor Hermite me ha dicho que le ha solicitado Ud. al señor Cantor suprimir de su memoria *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre* toda la parte filosófica y traducir al francés la parte matemática. Me parece que lo que hará la lectura de la traducción de esta bella memoria muy penosa, para los franceses que no están familiarizados con la cultura alemana, es menos la parte filosófica, que uno siempre sería libre de ignorar, que la falta de ejemplos un poco concretos. Así, esos números de la segunda y sobre todo de la tercera clase tienen un poco el aire de una forma sin materia, lo que repugna al espíritu francés. [...] Sería necesario, para hacerla accesible, dar algunos ejemplos precisos a continuación de cada definición, y además poner las definiciones al comienzo en lugar de ponerlas al final. Se le permitiría así al lector francés que comprendiera este bello trabajo, pese a la ignorancia en que está de las investigaciones anteriores [del autor].[34]

Hoy leemos los *Grundlagen* con la convicción de que es una contribución capital al pensamiento matemático y una obra genial. El gran Poincaré nos recuerda cuáles podían ser las sensaciones del lector que se aproximaba a la obra sin prejuicios sobre su valor.

33. En Pierre Dugac, «Georg Cantor et Henri Poincaré», *Bolletino di Storia delle Scienze Matematiche* 4 (1984), 65-96; las citas son de las pp. 69-71.

34. A Mittag-Leffler, 16 de marzo de 1883, en Dugac, *op. cit.*, 70.

Y no hay que olvidarse, claro, de las consideraciones críticas ofrecidas por un matemático muy influyente, interesado también por la filosofía, y muy preocupado por las cuestiones de fundamentos: Leopold Kronecker. Nos lo cuenta el propio Cantor:

> Kronecker, que me visitó a principios de julio, me explicó con las risas más amistosas que se había escrito mucho con Hermite a propósito de mi último trabajo, para demostrarle que todo ello no son más que «patrañas». Como ya me he acostumbrado a semejantes declaraciones, no me enfadé por ese comentario, sino que tuve mi pizca de diversión. De los números suprafinitos dijo, para entretenimiento mío, que «sólo *en el cielo* esperaba llegar al punto de lograr entenderlos». Pero, por más gracia que me haga, la cosa no deja de ser seria, en la medida en que una cantidad enorme de matemáticos ven sus juicios determinados por las opiniones de Kronecker, quien, como bien sabemos, las lanza con el mayor énfasis y *sans gêne*.[35]

Durante los siguientes meses, Cantor se obsesionaría cada vez más con las críticas y las «intrigas» que, según creía, orquestaban contra él Kronecker y sus seguidores.

Todo esto nos recuerda que en los trabajos de Cantor no se trata de una tendencia matemática «neutra», por así decir, sino de una clara toma de partido por el *enfoque abstracto* que iba consolidándose precisamente en aquella época. El avance del enfoque abstracto resultaba especialmente visible en las contribuciones de Riemann a la teoría de funciones, en las de Dedekind a la teoría de números algebraicos, o en las del propio Cantor a la teoría de series trigonométricas y de conjuntos de puntos. Y las protestas no se hicieron esperar: surgieron voces que recomendaban volver a los procedimientos más calculísticos, típicos de la matemática del siglo XVIII. En Alemania, el mayor y más influyente detractor de la matemática abstracta fue Kronecker: todo debía reconducirse a desarrollos algorítmicos basados en los números naturales, lo que implicaría una reforma del análisis en sentido constructivista, comenzando con el repudio de los números irracionales (véase *Fundamentos*, § 4). Aunque Kronecker nunca había criticado las ideas de Cantor

35. A Mittag-Leffler, 9 de septiembre de 1883, en *Briefe*, 127.

por escrito, sí lo había hecho en privado; además, en 1882 había publicado una crítica directa a las contribuciones de Dedekind.

Cantor era muy consciente de esta situación, sabía que Kronecker tenía un elevado grado de influencia en la adjudicación de plazas universitarias y sobre las opiniones de sus colegas, a través de las múltiples conversaciones y contactos que mantenía con ellos.[36] La introducción de los números transfinitos no sólo era un paso más en la dirección abstracta, sino un paso sumamente atrevido. Anticipando que Kronecker y sus seguidores mostrarían públicamente —pero no por escrito— su oposición, y que incluso le ridiculizarían por la dirección «incorpórea» que tomaban sus ideas, Cantor decidió romper una lanza en favor de la matemática abstracta.

El § 8 de la obra presenta su alternativa: una descripción muy interesante, aunque especulativa y teñida de idealismo, de la filosofía subyacente a la matemática abstracta. Aquí se establece una distinción clave entre la matemática y otras ciencias,[37] y se plantean como *únicos* requisitos a tener en cuenta en la introducción de conceptos matemáticos:

— la consistencia interna o ausencia de contradicciones,

— la coherencia con los conceptos matemáticos previamente aceptados, y

— el ser fructíferos, que tengan implicaciones de importancia.

La matemática no es una ciencia empírica, y los conceptos que maneja no tienen por qué limitarse a lo «realmente existente» en el mundo físico. De ahí que no haya necesidad de restringirlos según criterios de realidad externa («transiente», dice Cantor con lenguaje que probablemente es de origen teológico), bastando exigirles que sean coherentes lógicamente y que resulten fructíferos.

Todo esto, la orientación abstracta y la tendencia purista, se resumen en la célebre frase:

36. Uno de los seguidores de Kronecker era H. A. Schwarz, el mejor amigo de Cantor en sus tiempos de estudiante, que desempeñó un importante papel en la obtención de su plaza en la Universidad de Halle. Las relaciones entre los dos se habían ido deteriorando hasta degenerar en franca enemistad.

37. De nuevo apoyada en sus ideas metafísicas y teológicas, de nuevo separable de ellas.

Das *Wesen* der Mathematik liegt *gerade* in ihrer *Freiheit.*
La *esencia* de la matemática radica *precisamente* en su *libertad.*

El lector debe, claro está, cuidarse de entender esto en un sentido libertario. La libertad de la que se habla no es de ningún modo absoluta, sino que —como siempre en la libertad humana— está sometida a rígidas constricciones (en este caso, los tres requisitos de consistencia, etc.). Pero la matemática, más que una disciplina pura y abstracta, es para Cantor una disciplina en la que se cifra la libertad del pensamiento humano en su exploración de posibles conceptos y estructuras. Todo un programa, expuesto con tanto ardor como podía poner Schiller en su *Oda a la libertad.* Las similitudes que encontramos entre el Cantor del § 8 y los autores románticos son numerosas, tanto a nivel de estilo como al de presupuestos metafísicos y propuestas científicas.

Hay otro sentido en el que Cantor defendió la libertad del matemático. Otras figuras menores que él tuvieron carreras académicas más exitosas que la suya, y esta experiencia le resultó enormemente amarga. Reaccionando con cierta manía persecutoria, pensó que le iban aislando y atacando cada vez más. Al diablo con los colegas matemáticos, fue su primera reacción: desde 1885 estableció lazos cada vez más cercanos con filósofos y teólogos, pero luego supo rehacerse y sacar una lección más positiva de su triste experiencia. Puso en marcha toda su capacidad epistolar y de convicción, que no era poca, para con la ayuda de otros colegas estimular la creación de la Unión de Matemáticos Alemanes (*DMV*) en 1890 (hablaremos algo más de ello en la sección 5). Libertad de pensamiento matemático, sí, pero también libertad de acción.

4. LA HÉLICE VIRTUOSA: ORDINALES Y CARDINALES

Cantor dedica no poco espacio de los *Fundamentos* a argumentar que en los números transfinitos no existe ninguna contradicción oculta. Pero lo verdaderamente notable es cómo encuentra en ellos lo que no dudo en calificar como una *hélice virtuosa.* Un círculo vicioso nunca nos hace avanzar: ya se sabe

que las revoluciones completas nos devuelven al punto de partida. Pero si el movimiento de revolución vuelve sobre un plano distinto, si se trata de una hélice, entonces tiene lugar un avance.

4.1. Las ideas clave acerca de cómo justificar la introducción de los ordinales transfinitos, y de cómo definir las *clases numéricas*, quedaron bien establecidas ya en octubre de 1882.[38] Se trataba de dos «principios de generación», que permitían proseguir indefinidamente el proceso de formación de números hacia lo suprafinito, llegando a cifras nuevos números como los que siguen. Tras *todos* los números naturales vienen:

$$\omega, \omega+1, \ldots \omega+n, \ldots$$

de acuerdo con el primer principio de generación, que nos da un sucesor $(\alpha+1)$ para todo α, y tras todos estos, por el segundo principio, viene $\omega\cdot 2$:

$$\omega\cdot 2, \ldots \omega\cdot 2+n, \ldots \omega\cdot 3, \ldots \omega\cdot n, \ldots$$

y tras todos los $\omega\cdot n+m$, el proceso continua:

$$\omega^2, \ldots \omega^2+\omega\cdot n+m, \ldots \omega^3, \ldots \omega^n+\omega^{n-1}\cdot m+\ldots+r, \ldots \omega^\omega, \ldots,$$

y se prosigue con números tan fantásticos como ω elevado a ω omega veces, y mucho más allá, *ad suprafinitum* y *ad absolutum*.

Claro está que estos dos principios, y especialmente el segundo, podían despertar sospechas en los lectores. El primer principio de generación nos garantiza la existencia de un sucesor, poca cosa. El segundo principio es mucho más arriesgado: dada una sucesión *cualquiera* de números, que crece sin tener un máximo, existe un nuevo número ordinal que es el *inmediatamente siguiente* a los de la sucesión. Este principio es la clave que nos «garantiza» la *existencia* de ω, $\omega\cdot 2$, $\omega\cdot 3$, ... ω^2, ω^3, ... ω^ω, ... y así sucesivamente. Ni que decir tiene que estas ideas no tenían en realidad valor probatorio, ni ofrecían una definición —no digamos axiomatización— rigurosa del dominio de objetos pretendido. Eran más bien la descripción intuitiva de un proceso de creación que podría llevar a cabo un demiurgo, un ser divino, en su vida eterna.

38. Cartas a Mittag-Leffler de 25 de octubre (*Briefe*, 90-92) y a Dedekind de 5 de noviembre (*Briefwechsel*, *op. cit.* en nota 1, 55-59).

Ahora bien, ordinales como ω, $\omega{\cdot}2$ y ω^2 no plantean ningún problema: es sencillo establecer explícitamente ordenaciones no estándar del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales, bajo las cuales le corresponden esos números. Por ejemplo, $\omega{+}n$ corresponde al conjunto ordenado:

$$\{n{+}1, n{+}2, n{+}3, ..., 1, 2, ..., n{-}1, n\};$$

y $\omega{\cdot}2$ puede obtenerse de varias maneras, como puede ser:

$$\{1, 3, 5, ..., 2, 4, 6, ...\},$$

poniendo primero los números impares y después los pares.[39] Esto quiere decir que, si aceptamos como dado en acto el conjunto infinito $\mathbb{N}$, debemos aceptar los ordinales cantorianos de la *segunda* clase numérica. De manera análoga, si estamos dispuestos a aceptar como dado el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, debemos aceptar los ordinales cantorianos de *al menos* la tercera clase.[40] Pero, ¿puede llegarse más allá? ¿No entrañará contradicciones, superando los límites de la libertad matemática?

La respuesta se hace mucho más clara y concreta cuando disponemos de una axiomatización de la teoría de conjuntos, pero Cantor nunca dio este paso. Puede pensarse, entonces, que su única justificación estaba en sus convicciones metafísicas: la fe ciega en que todos los conjuntos transfinitos, los ordinales y las potencias están en el universo platónico de la mente divina, y por ello en la naturaleza (*Fundamentos*, § 7, § 8 y anotación 2). Pero no es tan simple: tenía también argumentos mucho más concretos y matemáticos; basta considerar las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ para vernos llevados más allá (*Fundamentos*, anotación 10), de modo que, si estamos dispuestos a aceptar como dado el conjunto de *todas* las funciones reales, otra vez arribamos a nuevas clases numéricas.

39. El lector no entrenado en teoría de conjuntos encontrará provechoso (y entretenido) pensar en otras reordenaciones de los números naturales, como por ejemplo de los tipos $\omega{\cdot}3$ y ω^2.

40. Ω y sus sucesores, en la notación empleada en los *Grundlagen*, ω_1 en notación actual. Para justificar la afirmación del texto con todo rigor, se requiere emplear el Axioma de Elección. Decimos «al menos» la tercera clase, ya que esto es lo que se deduce de la Hipótesis del Continuo.

¿Hasta dónde concretamente? ¿Dónde acaba lo admisible, que supuestamente empieza en $\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$, y dónde comienza lo inconsistente, que claramente ponen ante nosotros las paradojas conjuntistas? La solución a esto —en la medida que admite solución— la darían el propio desarrollo de la teoría axiomática de conjuntos y los larguísimos debates en torno a los fundamentos de la matemática.[41]

Vemos que al menos el proceso de formación de ordinales codificado mediante los dos «principios de generación» tiene cierta justificación desde la mentalidad matemática clásica. En sus prisas por publicar los *Fundamentos*, Cantor no argumentó bien ese punto, que para él resultaba casi obvio; pero pronto tuvo otro modo de presentar las ideas clave de los números transfinitos (véanse las cartas de 1884) que las hacían más aceptables para los matemáticos contemporáneos.

Pero lo que así obtenemos parece inutilizable: si el proceso es absolutamente interminable, dice Cantor, entonces no alcanzamos nada que pueda dar rendimientos matemáticos concretos. La clave de todo el asunto, lo que da al edificio su belleza, es un *tercer* principio: el de *restricción o limitación*. Éste establece, de una manera regular y armoniosa, conjuntos de ordinales a los que Cantor llama *clases numéricas*, que a su vez permiten definir una serie de cardinalidades sucesivas.

La condición clave para definir las clases numéricas es una condición de cardinalidad. Los números de la *primera clase* son todos aquellos tales que el conjunto de sus antecesores es finito; es decir, los naturales. La potencia de esa primera clase es la primera potencia transfinita, $\aleph_0$ (léase: alef sub cero) en la terminología que Cantor establecería en 1895. Los números de la *segunda clase* son todos los que tienen un conjunto de antecesores enumerable (de la potencia $\aleph_0$); éste es el caso de ω, ω^ω, etc. Y lo importante es que la potencia o cardinalidad de la segunda clase en su totalidad es precisamente la segunda potencia, $\aleph_1$, como Cantor demuestra (*Fundamentos*, § 12 y § 13). La *tercera clase* es la de los ordinales cuyos antecesores forman un conjunto de la potencia $\aleph_1$, y esta clase tiene la potencia $\aleph_2$. Y así sucesivamente.

41. Véanse, por ejemplo, Fraenkel, Bar-Hillel y Levy (1973), Lavine (1994).

Las clases numéricas quedan definidas mediante una condición de cardinalidad, y las cardinalidades se definen por medio de las clases numéricas. He aquí algo que podría parecer un círculo vicioso a un lector poco cuidadoso, pero que en realidad es *hélice virtuosa*, y presta a la extraordinaria invención —¿o descubrimiento?— de Cantor un atractivo muy especial. De este modo se conseguía definir una *escala transfinita* de potencias sucesivamente crecientes. Esto constituyó un avance extraordinario, porque así se podía precisar el problema del continuo. Llamando $\mathfrak{c}$ a la cardinalidad del continuo, la Hipótesis de Cantor dice exactamente que $\mathfrak{c}$ es la potencia de la segunda clase numérica:

$$\mathfrak{c} = \aleph_1.$$

4.2. ¿Cómo llegó Cantor al principio de restricción o limitación? No podemos aquí más que dar una indicación.[42] Los *Grundlagen* comienzan diciendo que su autor se ve incapaz de dar el menor paso adelante en teoría de conjuntos si no introduce los números transfinitos. Esto no era una figura retórica, sino estrictamente cierto. En la anterior entrega de la serie «Sobre variedades de puntos infinitas y lineales», Cantor había prometido demostrar el siguiente teorema:

> si el conjunto derivado $P^{(\alpha)}$ es vacío para algún α, entonces el primer derivado P' y el propio conjunto P son enumerables.[43]

Y nuestro matemático buscaba también establecer la inversa de ese teorema, lo que llamaremos el

> *Teorema* α: si el primer derivado P' —y por tanto P— es enumerable, entonces existe algún α tal que el conjunto derivado $P^{(\alpha)}$ es vacío.

42. Para más detalles véase Ferreirós (1995).

43. Sobre el concepto de conjunto derivado (y los «símbolos de infinitud» mencionados más abajo) véase la nota del editor n° 11, tras el texto de los *Fundamentos*. Por esta vía llegaría al teorema de Cantor-Bendixson.

Para demostrar esto se vio obligado a centrar su atención en los índices α, ya que un resultado de existencia requería disponer de conceptos más precisos al respecto, y la demostración le llevó de forma natural a imponerles una condición restrictiva. Esta condición era exactamente la que corresponde a la definición de la segunda clase numérica: el conjunto de los antecesores de α debe ser enumerable.

Se trataba pues del principio de limitación restringido al caso particular más simple. Según comentó Cantor a Mittag-Leffler:

> La demostración de este teorema [α] se encuentra bastante escondida, de modo que he debido buscarla en vano desde hace literalmente años; mas ahora puede ser expuesta con bastante facilidad.[44]

El resultado era generalización de otro más simple que Cantor había dado por válido ya en su artículo de 1878, y es probable que anduviera buscándolo desde entonces. Pero sólo tras la introducción de los ordinales transfinitos le resultaba posible superar los escollos.

Ahora había quedado definido de manera natural, y bien caracterizado, un conjunto de números que incluía todos los «símbolos de infinitud» previamente conocidos. Cantor se preguntó cuál era la potencia de este conjunto, y ya el 25 de octubre de 1882 era capaz de contestar que se trata justamente de la *segunda* potencia infinita. Inmediatamente advirtió cómo se podía desarrollar la idea, estableciendo el principio de limitación en su forma general, para definir algo así como una regla de medir transfinita, a cuya luz el problema del continuo tomaba una forma matemática precisa. El avance era innegable.

4.3. Este espléndido logro quedaba supeditado a la posibilidad de hablar de los ordinales transfinitos como objetos que pueden formar conjuntos, como *verdaderos números*. Tras cien años de práctica axiomática moderna y de formalismo, el sen-

44. Carta de 17 de octubre de 1882, en *Briefe*, 88. Véase un precedente del resultado en *Abhandlungen*, 120.

tido de esta objeción les resultará opaco a muchos matemáticos. Pero hay que pensar que Cantor pertenece a una generación pre-formalista, y que en su opinión la matemática trabaja con objetos bien definidos y reales, que existen en alguna esfera del pensamiento. Hay buenos motivos —creen Cantor y sus contemporáneos— para tratar como objetos a los puntos y rectas del espacio, a los números naturales y a los reales, a las funciones continuas e incluso a las discontinuas. ¿Los hay para hacer lo propio con esos «símbolos», los ordinales transfinitos?

Si recordamos lo que sucedió en el caso análogo de los números complejos, nos resultará más fácil comprender el punto de vista cantoriano. Los complejos fueron mirados con gran desconfianza mientras parecían ser meros símbolos con los que era posible operar, pero a los que no se podía asignar una referencia clara. En su favor hablaba el hecho de que se les aplicaban exactamente las mismas reglas de cálculo que a los otros números, en su contra que su interpretación resultaba más que oscura. Es la época en que eran llamados números «imaginarios» por contraposición a los reales, números «imposibles».[45] Esto cambió cuando ellos y sus operaciones fueron interpretados en términos de segmentos dirigidos sobre el plano (vectores), o en términos de puntos (pares de números reales). Se les había asignado una referencia, y ya no había ninguna razón para ignorarlos o considerarlos más «irreales» que los números irracionales. Por eso la denominación cambió, de «imaginarios» a meramente «complejos». Y Gauss extendió a ellos la teoría de números: todo un vuelco histórico.

Como nos recuerda Cantor, hasta 1882 los ordinales habían sido para él meros «símbolos de infinitud». Lo real eran los conjuntos de puntos que estaba estudiando y las operaciones a las que se podían someter, entre ellas la operación de formar el conjunto derivado. En el estudio de esta operación sobre conjuntos de puntos, era necesario introducir índices que, sorpren-

45. Es importante tener en cuenta que la interpretación usual de los números reales, como cantidades o proporciones entre cantidades, no podía extenderse a los imaginarios (tampoco a los negativos).

dentemente, continuaban hasta el infinito y más allá. Pero, de momento, no había razones para pensar que esos índices o símbolos fueran números.

El argumento de Cantor a favor de que los números transfinitos son *verdaderos números* consiste esencialmente en tres puntos: 1°) entre ellos pueden definirse operaciones aritméticas, las cuales siguen reglas análogas —aunque no idénticas— a las del álgebra habitual; 2°) son susceptibles de una interpretación perfectamente natural e interesante, tienen una referencia clara en términos de conjuntos infinitos bien ordenados; y 3°) es posible extender la teoría de números a este nuevo dominio. Nótese el paralelismo exacto entre este caso y lo antes dicho de los números complejos.

Conviene también recordar el enorme prestigio que tenía entre los alemanes la teoría de números: por influencia de Gauss, éste era quizá el campo matemático de mayor prestigio en aquel momento y lugar. Los primeros trabajos de Cantor (doctorado y habilitación) fueron de teoría de números, y los *Fundamentos* anudaron con ese viejo hilo al abrir el campo enorme e inexplorado de la teoría de números transfinitos. Cantor tenía, pues, razones para pensar que su nueva contribución podía traerle fama inmortal y éxito en su carrera, aunque sólo lo primero se cumplió.

No es necesario decir aquí nada más sobre los puntos 1° y 3°, abundantemente tratados en los *Fundamentos* (§§ 1-3, 14). Pero sí conviene decir algo más sobre el 2°. Se trataba para Cantor de un punto capital, como no podía ser menos si tenemos en cuenta que hablamos de cuál es la referencia o la interpretación de los nuevos números. Respuesta: cada ordinal transfinito representa el ordenamiento de los elementos de un conjunto *bien ordenado*, es decir, un conjunto C ordenado de modo que tanto C como cualquiera de sus subconjuntos tiene un primer elemento (*Grundlagen*, § 2).

A partir de una conferencia que dio en septiembre de 1883,[46] Cantor adoptaría un nuevo punto de vista en la intro-

46. En la *Naturforscherversammlung* [Reunión de científicos, matemáticos inclusive] de Freiburg, con el título: «Sobre los verdaderos números enteros infinitos y las relaciones entre ellos»; véase *Briefe*, 130.

ducción de los ordinales transfinitos. Abandonó los principios de generación (sección 4.1) y tomó como punto de partida —como el suelo firme sobre el cual se instalan los ordinales— los conjuntos bien ordenados:

> Parto del concepto de «conjunto bien ordenado», llamo conjuntos bien ordenados del *mismo tipo* (o del mismo número) a aquellos que permiten relacionar entre sí sus elementos biunívocamente, *salvaguardando la ordenación* [Rangfolge] *en ambos lados*, y entiendo por número el signo o el concepto para un *tipo determinado* de conjuntos bien ordenados. Limitándonos a los conjuntos *finitos*, se obtienen de esta manera los números enteros finitos. Pero si pasamos a considerar todos los tipos de conjuntos bien ordenados de la *primera* potencia, llegamos necesariamente a los números transfinitos de la segunda clase, y mediante ellos a la *segunda* potencia.[47]

Desde esta época, Cantor fue siempre de la opinión de que los números son *conceptos*. En sus *Beiträge* de 1895, dice que el «tipo de orden» de un conjunto es el «concepto general» que se obtiene al hacer abstracción de las peculiaridades de los elementos, pero preservar las relaciones «de rango» entre ellos; si además hacemos abstracción de la ordenación, se alcanza el concepto de la potencia o cardinalidad del conjunto.

Cantor coincidió con Frege y Russell en entender los números primariamente como cardinales: 2 o 3.000 son ante todo *cantidades* de elementos.[48] Sin embargo, al introducir los números transfinitos se estaba situando en el punto de vista opuesto, ya que ω y sus sucesores son números ordinales, representantes de tipos de (buen) orden. Sólo pensando en los números como *ordinales* podemos llegar a afirmar que los transfinitos son «verdaderos números». Hay razones para pensar que esta transición fue facilitada por los encuentros que Cantor tuvo con Dedekind en septiembre de 1882.

47. Esta descripción resumida se toma de la carta a Kronecker del 24 de agosto de 1884; Meschkowski (1983), 251-252. Las palabras «el signo» son sobre todo un guiño a Kronecker, un intento de acercarse a la posición que éste prefería. Véase la anotación 7 de Cantor a los *Fundamentos*.

48. Esto se encuentra en obras suyas de 1882, 1885, 1895.

Georg Cantor durante los años 1880, época de su máxima creatividad matemática.

Durante estos encuentros, Cantor conoció por vez primera las ideas de su colega sobre la fundamentación del número natural. Durante la semana que ambos coincidieron en Harzburg (localidad vacacional en las montañas del Harz),[49] Dedekind le prestó el manuscrito que había ido escribiendo de 1872 a 1878. Contenía su célebre definición de finito e infinito, empleada como base para una teoría puramente deductiva, y también su teoría de cadenas, su definición semi-axiomática de la estructura del conjunto de los naturales, y el desarrollo de la aritmética elemental (véase Dedekind, 1998).

El punto de vista de Dedekind había sido siempre entender los números primariamente como ordinales: 2 o 3.000 son ante todo ordinales, *indicadores de posición* dentro de un ordenamiento. Y su teoría de los números se basaba en la consideración de lo que llamó «la *cadena* de un conjunto», y en particular en el recurso a las cadenas $\{n\}_0$ (formadas por n y todos sus sucesores), que son conjuntos infinitos bien ordenados. Dedekind resaltaba así que cada número n está asociado a dos conjuntos ordenados: el «segmento inicial» $\{1, 2, \ldots n\}$ y la «cadena» infinita $\{n, n+1, \ldots\} = \{n\}_0$. El estudio de estos conjuntos ordenados infinitos $\{n\}_0$ era la base de la rigurosa fundamentación conjuntista de la aritmética que ofreció.

49. La existencia de este encuentro queda confirmada por las cartas del propio Cantor. Del 7 al 12 de septiembre Dedekind prestó su manuscrito a Cantor (*Nachlass Dedekind*, Cod. Ms. Dedekind III, 1, II, 40; y véase Cod. Ms. Dedekind I, 20). El texto del manuscrito —mencionado en Dedekind (1888, 336)— se encuentra en un apéndice de Dugac (1976).

La transposición de este tipo de consideraciones al caso de los «símbolos de infinitud» fue una de las claves de la innovación que Cantor advirtió —o recibió de la inspiración divina— en octubre de 1882. Inmediatamente después de su encuentro en Harzburg, Cantor escribe cartas en las que discute, por primera vez en su carrera, ideas generales sobre conjuntos ordenados.[50] Y en el plazo de un mes da el paso clave hacia los ordinales transfinitos. Hay pues motivos para pensar que el intercambio de ideas con Dedekind desempeñó un papel heurístico importante.

4.4. Un aspecto llamativo de la obra de Cantor, ya comentado, es su tendencia a concentrarse en problemas especulativos. Desde 1874, y salvo casos más bien aislados, centró su atención en cuestiones «de principio» y desatendió sus posibles aplicaciones en ramas bien establecidas de la matemática. Esto resulta tanto más llamativo, cuanto que la aceptación de sus ideas y el éxito de su propia carrera como matemático se hubieran beneficiado grandemente de un mayor énfasis en cuestiones de «interés real y presente» —por decirlo con palabras de Hermite—. Pero sin duda se trata de un rasgo característico de la orientación mental del genial matemático.

Con todo, naturalmente Cantor era consciente de que sus resultados tenían implicaciones, sobre todo en análisis. La teoría de conjuntos de puntos había nacido dentro del análisis real (teoría de series trigonométricas), el campo matemático «estándar» donde Cantor realizó contribuciones propias de mayor importancia, de 1870 a 1872. El estudio de los *conjuntos de unicidad* de series trigonométricas fue precisamente lo que le llevó a introducir, en 1872, el concepto de conjunto derivado. En los años siguientes, autores como P. du Bois-Reymond, U. Dini y J. Harnack hicieron uso de la idea en diversos intentos de profundizar en el concepto de integral.

Cantor mismo contribuyó en 1882 y 1884 a esa línea de investigación, que años más tarde desembocó en los estudios de Borel y Lebesgue sobre integración y teoría de la medida. Pero, además, Cantor estaba convencido de que el concepto de po-

50. *Briefwechsel Cantor-Dedekind*, *op. cit.* en nota 1, 52-54.

El matemático sueco Gösta Mittag-Leffler (1846-1927), fundador de la revista *Acta Mathematica*, fue un apoyo clave para Cantor hacia 1883/1884.

tencia o cardinalidad resultaría de importancia capital en análisis. Aquí su opinión sobre una cuestión matemática estaba en parte condicionada por sus intereses especulativos, y puede decirse —con las debidas precisiones— que su juicio no fue muy acertado.[51]

El estudio de los conjuntos de puntos tiene importancia también en teoría de funciones (complejas) y Cantor era bien consciente de alguna de sus aplicaciones en este campo. En particular, a lo largo de la correspondencia que mantuvo con Mittag-Leffler en 1882 se discute cómo el Teorema α (sección 4.2) permite avanzar en el estudio de las funciones analíticas. De hecho, la cuestión sale a relucir en el último párrafo del § 3 de los *Fundamentos*, y efectivamente, en 1884 Mittag-Leffler consiguió demostrar su resultado más importante, estableciendo la representación de una función meromórfica en términos de sus partes singulares.[52] El teorema de Mittag-Leffler constituía una conclusión natural para un importante campo de investigación abierto por Weierstrass.

En 1895 Minkowski escribía a su amigo Hilbert: «De nuevo me he dado cuenta de que Cantor es uno de los más geniales

51. Al menos, si juzgamos la cuestión desde la perspectiva de 1900 y las décadas siguientes. Como se sabe, los axiomas de grandes cardinales tienen implicaciones para la teoría descriptiva de conjuntos.

52. «Sur la représentation analytique des fonctions d'une variable indépendante», *Acta Mathematica*, vol. 4 (1884). En el mismo campo, unos años más tarde llegarían contribuciones de A. Hurwitz. Pero ya en 1885 Poincaré logró resultados espectaculares aplicando ideas cantorianas en su estudio de las funciones automorfas («Sur les courbes définies par des équations différentielles», *Jour. Math. Pures et Appl.*, 1885).

matemáticos vivos».[53] Una de las principales razones que llevaban a los matemáticos a maravillarse de la profundidad y la genialidad de Cantor, en torno a 1900, es que su problemática y sus resultados, tan especulativos, reaparecían de manera increíble como elementos clave para la obtención de resultados tangibles y bien comprensibles. Valgan las anteriores indicaciones como muestra de ello.

5. LA DÉCADA DEL DISTANCIAMIENTO: 1885-1895, Y MÁS ALLÁ

Hemos visto cómo Cantor sufrió en 1884 una crisis mental, producto de la tensión que le provocaba su enfrentamiento con Kronecker y su sensación de ser «perseguido» entre los matemáticos alemanes. La serie de sinsabores era ya larga: primero, el fracaso en conseguir una cátedra en una universidad importante, especialmente Berlín; segundo, el fracaso en su plan alternativo de hacer de la necesidad virtud, convirtiendo a Halle en un gran centro matemático;[54] en suma, la experiencia de ir perdiendo los apoyos relacionados con la escuela de Berlín, sin ganar otros a cambio, sabiendo lo que esto significaba en la política académica del Imperio alemán.

Pero eso no fue todo, porque en 1885 vendría la culminación de sus fracasos.

Las nuevas ideas acerca de los ordinales transfinitos y los conjuntos bien ordenados, plasmadas en los *Fundamentos*, movieron a Cantor a una generalización, estudiando la teoría de los tipos de órdenes lineales (totales). Como era ya habitual en él, en lugar de madurar esa teoría y esperar a que diera frutos —confiaba, como tantas veces, en que le permitiría resolver la Hipótesis del Continuo—, Cantor se dio mucha prisa en publicar. A comienzos de 1885 el artículo estaba siendo compuesto por los tipógrafos de *Acta Mathematica*, cuando Cantor recibió una

53. H. Minkowski, *Briefe an D. Hilbert* (Berlin, Springer, 1973), 68.

54. Aunque Dedekind había rechazado la oferta, Cantor siguió insistiendo y perdió con ello un tiempo precioso, hasta que finalmente los de Berlín impusieron un candidato: Albert Wangerin.

carta de Mittag-Leffler recomendándole que aplazase la publicación hasta obtener resultados más tangibles. El consejo tenía mucho de sensato, pero Cantor creyó ver en ello los intereses egoístas de Mittag-Leffler, que habría temido enemistarse con los berlineses al dar demasiado apoyo al de Halle. Probablemente había algo de verdad en esto, y el hecho es que Cantor se sintió definitivamente expulsado de la comunidad matemática.

Desde 1878 había decidido no publicar en el *Journal* berlinés; ahora *Acta* se sumaba a la lista; y en cuanto a los *Annalen* de Klein, aunque le habían prestado una ayuda inestimable, Cantor no encontró en su editor ya sea la comprensión intelectual, ya el apoyo político que hubiera deseado. En los diez años siguientes, Cantor renunció a publicar en revistas matemáticas. Se acercó más aún a la filosofía y la teología, e incluso propuso a su universidad que su campo de docencia se desplazara a la primera (aunque el fracaso entre los alumnos de un primer curso sobre Leibniz le disuadió).[55] Publicó tres ensayos en el *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, notablemente una publicación de orientación fichteana que retomaba el teísmo ético de Leibniz.

Hay que decir, en honor a la verdad, que las relaciones de Cantor con sus colegas más cercanos fueron más bien tormentosas. El primer caso fue el de Schwarz, que pasó de ser el gran amigo de los años de estudiante, valedor para la plaza de Halle, a enemigo directo. No sabemos bien cuáles fueron las circunstancias, pero probablemente Schwarz no viera con buenos ojos los «coqueteos» de Cantor con revistas como los *Annalen* en 1872, ni tampoco su inusual actitud al postularse para una plaza en 1875, ni la dirección cada vez más especulativa de sus trabajos. En 1883 Kummer se retiró de su cátedra en Berlín, y Cantor decidió ofrecerse de nuevo como candidato para ocupar la cátedra. En una llamativa carta a Mittag-Leffler, del 1 de enero de 1884, explica sus motivos:

> Entiende Ud. muy bien el sentido de mi solicitud; no he pensado ni de lejos que pudiera llegar a Berlín ahora. Pero como es

55. Véase Bölling (1997), 79-80, que cita cartas de Cantor y Kowalewskaya.

> mi intención llegar allí, *y como sé que Schwarz y Kronecker intrigan terriblemente contra mí desde hace años*, por miedo a que pudiera alcanzarlo, he considerado que era mi deber tomar yo mismo la iniciativa y dirigirme al ministro. *El efecto inmediato de ello lo había previsto con mucha precisión, a saber, que Kr. reaccionaría como si le hubiera picado un escorpión y lanzaría un alarido, junto con sus tropas de apoyo, que haría pensar que Berlín se había convertido en el desierto de África*, con sus leones, tigres y hienas. Realmente he logrado este efecto, a lo que parece.

El caso de Mittag-Leffler es llamativo, pero quizá típico, por la intensidad con la que se estableció una amistad y complicidad en 1882/1883, y por lo pronto que quedó rota. Una vez que Mittag-Leffler le escribió su carta recomendándole aplazar la publicación del artículo «Principios de una teoría de los tipos de orden», la herida fue demasiado grande y el declive, inevitable.[56] Mittag-Leffler le había escrito que publicar demasiado, sin presentar resultados tangibles, podría acarrear el descrédito para sus novedosas ideas, de modo que tendrían que pasar quizá más de cien años hasta que fueran redescubiertas. Estas palabras, reinterpretadas en el sentido de que sus ideas eran enormemente prematuras, se quedaron bien grabadas en la memoria de Cantor.

Pero el caso quizá más llamativo, por la complejidad de las actitudes y sentimientos, fue precisamente el de Dedekind. Fue el matemático que más comprensión mostró para las nuevas ideas de Cantor, cosa normal dado que él mismo contribuyó enormemente a la reorientación conjuntista de la matemática moderna. Fue la gran apuesta en la que Cantor puso sus esperanzas al intentar hacer de Halle un centro importante, en 1881. Pero fue también una persona con la que sus relaciones se enturbiaron desde 1874. En otro lugar he argumentado que probablemente la ingratitud de Cantor hacia Dedekind, en aquel momento, tuvo su origen en que el primero tenía sus esperanzas puestas en el apoyo de los berlineses, que veían con malos ojos

56. Véase I. Grattan-Guinness, «An Unpublished Paper by Georg Cantor», *Acta Mathematica* 124 (1970), 65-107.

Fotografía de los matemáticos que participaron en la fundación de la Asociación Alemana de Matemáticos (DMV) en 1890: Cantor es el cuarto por la derecha, sentado junto a su amigo Lampe; tras él, de pie, están Hilbert y Minkowski; Felix Klein (1849-1925) es el quinto por la derecha, sentado.

al segundo.[57] Además, Dedekind no era sino un humilde profesor en la Escuela Técnica de Brunswick, alguien que carecía completamente del poder de influir en la vida académica y científica, salvo por sus escritos.

Tras el distanciamiento de los matemáticos, en 1885, Cantor no sólo comenzó una extensa correspondencia con teólogos y filósofos, sino que se entregó con intensidad a defender — frente a la incredulidad de los filólogos— una tesis peregrina, pero en boga por entonces: que el canciller Bacon era el verdadero autor de los dramas de Shakespeare. Fue la llamada polémica Bacon-Shakespeare, que da prueba de los variados intereses de nuestro personaje, y constituyó una pasión duradera: Cantor invirtió una gran suma de dinero en comprar libros de la época isabelina, y al respecto publicó él mismo tres libros entre 1896 y 1897. Hay dos aspectos de especial interés en este episodio: la concepción aristocrática que pone de manifiesto, pues se pensaba que un plebeyo como el actor Shakespeare no podía dar frutos de semejante altura moral e intelectual, y la creencia en un inmenso papel histórico de los «grandes hombres»: hay motivos para pensar que Cantor se aplicó a sí mismo esta creencia.

Por eso, el inagotable torbellino que era Cantor hizo aún algo más en esos años. Harto de que el ambiente matemático alemán pudiera estar de tal modo manipulado por un grupo de poder, puso en marcha medidas para contrarrestarlo. Se necesitaba una unión matemática que sirviera para poner freno a los poderosos, prestando apoyo y protección a la savia nueva, las ideas innovadoras de jóvenes brillantes. De aquí surgió el proyecto de la Unión Matemática Alemanes [*DMV*: *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*], que Cantor promovió con todas sus fuerzas y para la que encontró apoyo en poderosos emergentes

57. Ferreirós (1993) y (1999, 185-186). El motivo de la actitud de Kronecker y Kummer hacia Dedekind fueron los «celos» que les produjo la publicación de su teoría de los números algebraicos en 1871. Cantor mismo comenta a menudo en sus cartas que Kronecker no se lo perdonaba (cosa que también dice Frobenius) y llega a explicar a Mittag-Leffler que en los *Fundamentos*, § 8, le hace un cumplido a Kronecker, poniendo a su lado el nombre de Dedekind, precisamente para molestar al berlinés (*Briefe*, 144).

como el mismo Felix Klein. Costó no poco trabajo convencer a sus colegas: aunque habían pasado más de quince años desde la unificación bismarckiana de Alemania, la mayoría seguían acostumbrados a pensar en términos regionales o locales, y también a la influencia enorme de algunos mandarines. La idea tuvo éxito, fraguando en 1890, y Cantor fue nombrado presidente el mismo año, siendo reelegido los tres siguientes (un honor nada frecuente). El resultado contribuyó sin duda al avance de la matemática y a dar una mayor sensación de autonomía a sus cultivadores.

Fotografía de Cantor en 1894, época en que dejó la presidencia de la DMV y empezó a redactar sus últimos artículos.

También decidió Cantor, por motivos similares, impulsar los congresos matemáticos internacionales, y en este sentido mantuvo de nuevo una intensa correspondencia, por ejemplo con matemáticos franceses. Pero su papel en la gestación de los Congresos Internacionales de Matemáticos celebrados en 1897 en Zurich y 1900 en París no fue tan central, sino que quedó relegado a un segundo o tercer plano frente a la intervención de figuras como Klein.

Al fin, hacia 1894, Cantor se sintió reconciliado con la nueva situación. El desarrollo de la *DMV* se consolidaba y tomaba cuerpo; Kronecker había muerto en 1891, y aunque la universidad más importante, Berlín, estaba sólidamente en manos de los ortodoxos o conservadores, su mano ya no se extendía por todo el Reich como antes. Bajo el mando de Klein, Gotinga se consolidaba como nuevo centro fuerte al que ahora (en 1895) se incorporaba David Hilbert, un hombre de tendencias modernas, admirador de Dedekind y del propio Cantor, con quien éste hizo buenas migas. Todo ello le movió a publicar de nuevo

en *Mathematische Annalen*, dando a la luz lo que sería su testamento matemático: una reposada presentación de sus ideas fundamentales sobre los números transfinitos (cardinales y ordinales), los tipos de orden y los conjuntos bien ordenados, bajo el título de «Contribuciones a la fundamentación de la teoría de conjuntos transfinitos» (1895 y 1897).[58]

Las *Contribuciones* de 1895 y 1897 constituyeron el testamento científico de Cantor, y fueron la fuente en que bebieron los que se convertirían en los próximos grandes impulsores de la teoría de conjuntos transfinitos: matemáticos como Ernst Zermelo en Gotinga y Felix Hausdorff en Leipzig. Eran artículos que, a diferencia de las contribuciones de *Sturm und Drang* en los años 1880, habían sido redactados con cuidado tras una larga meditación de la cuestión. Presentaban resultados clave sobre las cardinalidades, ahora bajo la figura de los cardinales transfinitos o alefs: $\aleph_0$, $\aleph_1$, ... $\aleph_\omega$, ...; sobre los tipos de orden, incluyendo el orden denso η de los racionales y el orden continuo θ de los números reales; y sobre los números ordinales transfinitos, especialmente una teoría rigurosa de los ordinales enumerables de la segunda clase numérica.[59] Pero en cierto sentido eran artículos decepcionantes, porque no abordaban las grandes cuestiones abiertas de la teoría cantoriana, muy en particular el problema del buen orden y la Hipótesis del Continuo (HC).

Como el lector podrá ver por las cartas a Hilbert y Dedekind de 1897 y 1899, Cantor tenía muy en mente esos grandes problemas. De hecho, su firme intención era publicar una tercera parte de las *Contribuciones* que discutiría las paradojas de la teoría de conjuntos, argumentando a partir de ellas que todo conjunto admite ser bien ordenado, y que por tanto toda cardinalidad infinita es un alef. La HC habría quedado de nuevo en el aire, pero el avance de la teoría de conjuntos hubiera sido innegable. Es de lamentar que Cantor no cumpliera su objetivo,

58. Véase la edición alemana en Cantor, *Abhandlungen*, o la inglesa en traducción de Jourdain (Cantor 1915).

59. Una buena presentación, muy compacta, de parte de estas ideas se encuentra en las cartas de finales de los 1890, especialmente la magnífica carta a Dedekind del 3.08.1899.

pero hay que reconocer su capacidad de autocrítica, y es que las ideas «fundamentales» con las que respondía a las paradojas no eran suficientemente claras. Hablaremos de ello en la sección 6. Entretanto, fue Hilbert quien se encargó de recordar a la comunidad matemática cuáles eran los grandes problemas abiertos por Cantor, al discutir la HC y el problema del buen orden en su célebre conferencia de París (1900) sobre «Problemas matemáticos».

La dificultad definitiva que impidió esta última publicación fue un recrudecimiento de la enfermedad maníaco-depresiva de Cantor. En las últimas cartas de 1899, recogidas en traducción, podrán ustedes advertir claras señales de ello. No sabemos con certeza hasta qué punto Cantor pudo sufrir crisis importantes entre 1884 y 1899; Grattan-Guinness (1971) se inclina por pensar que no, y en todo caso parece que la actividad docente del matemático no se vio afectada. En cambio, durante el invierno de 1899/1900 fue necesario liberarle de dar clases, y las repeticiones del problema condujeron a que fuera nombrado emérito ya en 1905. La gota que había colmado el vaso, ya muy lleno, fue la muerte de su hijo Rudolf el 16 de diciembre de 1899. Cantor entró en una severa crisis, que duró hasta muy entrado el año 1900; desde entonces hasta su muerte en 1918, pasaría largos períodos en la *Nervenklinik* de Halle.

Es interesante citar las reminiscencias del gran hombre que Meschkowski (1983, 173-174) pudo recoger de Alice, sobrina suya que pasó muchas semanas en casa de Cantor a lo largo de años:

> Mi tío permanecía encerrado en su cuarto de estudio, enormemente grande, cuyas cuatro paredes estaban todas cubiertas de libros desde el suelo hasta el techo. Allí parecía vivir su vida, para sí mismo, aislado en sus propios planetas, desconocido para el resto de nosotros. Por más que me hubiera gustado conocerle de verdad, él nunca estaba visible. En casa de mis padres pude escuchar una y otra vez comentarios que indicaban cómo mi padre (su cuñado)[60] tenía en muy alto el carácter de mi tío, su pureza y su bondad, y cómo le impresio-

60. El doctor Paul Guttmann, de quien hemos hablado en la sección 2.

> naba enormemente su grandeza de espíritu. Mi padre parecía divinizar a mi tío. También se hablaba de sus ausencias periódicas, durante días, del hogar propio en Halle, el cual abandonaba repentinamente y «de su propio pie», por así decir. Luego era llevado a un hospital y más tarde volvía a casa y todo parecía volver a tomar su camino usual; hasta la próxima vez. Me hice una imagen de sus estados de ánimo sobreexcitados, exaltados, pero no querría emitir un juicio al respecto, y en realidad no podría.

Si el doctor Guttmann divinizaba a Cantor, el propio Georg aprendió a interpretar su enfermedad mental en clave sobrenatural. No es extraño que una persona de estas características interprete las fases maníacas como algún tipo de «intervención» superior en la propia mente. Además, las fases altas de la enfermedad pueden haber sido una ayuda para la exploración mental de un territorio tan nuevo como el dominio de lo transfinito,[61] lo cual intensificaría la impresión de realidad exterior en esas ideas, y de ser en cierto modo un «enviado» para comunicarlas. Las *Contribuciones* de 1895 van encabezadas por varias citas, entre ellas el famoso «hypotheses non fingo» de Newton, y una cita en latín cuyo autor original es Bacon —de nuevo el inglés Francis Bacon—:

> Pues no damos leyes al intelecto o a las cosas a nuestro arbitrio, sino como escribas fieles las recibimos y copiamos de la voz revelada de la misma naturaleza.[62]

Cantor, fiel escriba e intérprete de la voz revelada de Dios o la Naturaleza (recordemos a Spinoza): nada podría ser más adecuado a la interpretación realista, platónica, de las geniales teorías que defendió el matemático.

A pesar de las graves dificultades causadas por la enfermedad, Cantor aún tuvo tiempo de participar en algunos sucesos notables. En 1904 estuvo presente en las sesiones del Congreso

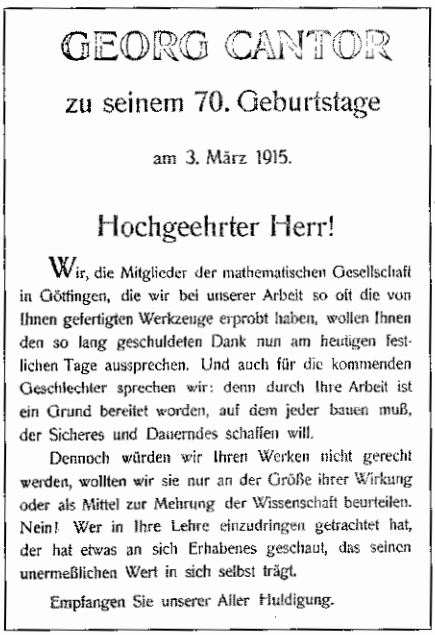
61. Esta opinión, con la que concuerdan los expertos, fue compartida por un sobrino de Cantor, médico, y por el matemático Carathéodory.

62. *Abhandlungen*, 282.

Internacional de Matemáticos celebrado en Heidelberg, en el cual —como había ocurrido en los dos anteriores— la teoría de conjuntos tuvo una importante presencia. Hilbert defendió de nuevo esta teoría y el infinito actual, pese a la conciencia general del grave problema que suponían las paradojas, proponiendo una manera de fundamentar la lógica y la matemática que guarda conexiones importantes con su famoso Programa de los años 1920, basado en la *teoría de la demostración*. Sobre todo, un matemático renombrado y famoso por la precisión de sus trabajos, el húngaro G. König, prometió resolver el primero de los Problemas Matemáticos de Hilbert, presentando una detallada y muy técnica demostración de que la potencia $\mathfrak{c}$ del continuo ¡no puede ser un alef! El asunto fue tan sonado que se anularon las otras sesiones para que todos los matemáticos pudieran asistir a la exposición de König, y hay quien dice incluso que la noticia salió en la prensa y el duque de Baden-Württemberg fue informado en persona por Felix Klein.

Según cierto matemático, Cantor tomó entonces la palabra y dio gracias a Dios por haberle permitido vivir la refutación de sus errores. La anécdota es hermosa y parecería encajar con su personalidad, pero aquel matemático no estaba presente, y los testigos presenciales nos cuentan algo distinto. Según Schoenflies, Cantor en ningún momento aceptó el resultado de König, «a pesar de sus demostraciones *exactas*»; le gustaba repetir de broma que «no sentía ninguna desconfianza hacia el rey [König], sólo hacia su ministro». El «König» al que se refería Cantor es, obviamente, Dios mismo, y —a diferencia de lo que sucedía en su propio caso— el matemático húngaro no era un escriba o intérprete fiable. En cierto modo tenía razón, pero —los designios de Dios son enrevesados— el intérprete poco fiable no había sido König, sino otro matemático del que aquél tomó un resultado formulado en su tesis doctoral con una generalidad excesiva: se trata de Felix Bernstein, alumno del propio Cantor que presentó su tesis en 1901 bajo la dirección de Hilbert.

Este incidente hizo que el problema del continuo y la cuestión relacionada del buen orden se convirtieran en una obsesión para los jóvenes matemáticos interesados en la teoría de conjuntos. Hausdorff dijo haber sufrido una «monomanía» por aquellos meses, pero consiguió dar con el error unos meses más tarde: Kö-



GEORG CANTOR

zu seinem 70. Geburtstage

am 3. März 1915.

Hochgeehrter Herr!

Wir, die Mitglieder der mathematischen Gesellschaft in Göttingen, die wir bei unserer Arbeit so oft die von Ihnen gefertigten Werkzeuge erprobt haben, wollen Ihnen den so lang geschuldeten Dank nun am heutigen festlichen Tage aussprechen. Und auch für die kommenden Geschlechter sprechen wir: denn durch Ihre Arbeit ist ein Grund bereitet worden, auf dem jeder bauen muß, der Sicheres und Dauerndes schaffen will.

Dennoch würden wir Ihren Werken nicht gerecht werden, wollten wir sie nur an der Größe ihrer Wirkung oder als Mittel zur Mehrung der Wissenschaft beurteilen. Nein! Wer in Ihre Lehre einzudringen getrachtet hat, der hat etwas an sich Erhabenes geschaut, das seinen unermeßlichen Wert in sich selbst trägt.

Empfangen Sie unserer Aller Huldigung.

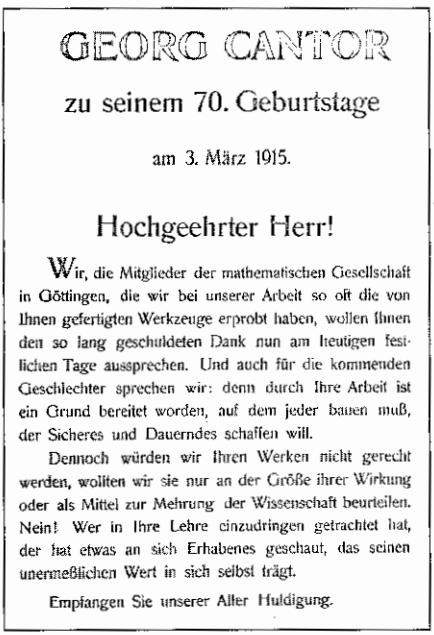
Texto presentado a Cantor por los matemáticos de Gotinga con ocasión de la celebración de su 70° aniversario.

nig había conseguido demostrar un importante teorema (que la potencia $\mathfrak{c}$ del continuo no puede ser un alef *de cierto tipo*)[63] pero no había echado por tierra la creencia fundamental de Cantor. También Zermelo, hombre del entorno de Hilbert, prestó toda su atención al tema, y en septiembre del mismo año redactó una carta que contenía la demostración general del Teorema del Buen Orden, empleando para ello un nuevo postulado: el Axioma de Elección. La publicación de esta carta en los *Mathematische Annalen* desató ríos de tinta, un debate internacional sobre los postulados aceptables en teoría de conjuntos que dio nueva intensidad a la llamada «crisis de fundamentos».[64] Durante dos o tres décadas, fue habitual tratar el postulado de Elección como si fuera más hipotético que el resto de los axiomas de la teoría de conjuntos, e incluso hubo grandes matemáticos que se esforzaron para no emplearlo en absoluto.

En 1912 Cantor fue nombrado doctor *honoris causa* por la Universidad de St. Andrews, y consiguió realizar el viaje sin problemas, acompañado de su hija. Cumplía con esto uno de

63. $\mathfrak{c} \neq \aleph_\alpha$ si α es un ordinal límite (o sea, por hablar el lenguaje de los *Fundamentos*, un ordinal obtenido mediante el *segundo* principio de generación). Hausdorff explicaba que la fórmula $\aleph_\mu{}^{\aleph_\alpha} = \aleph_\mu \cdot 2^{\aleph_\alpha}$, que Bernstein había creído demostrar, no es válida cuando μ es un ordinal límite.

64. Sobre todos estos sucesos de 1904 pueden verse más detalles en Ferreirós (2004).



GEORG CANTOR

zu seinem 70. Geburtstage

am 3. März 1915.

Hochgeehrter Herr!

Wir, die Mitglieder der mathematischen Gesellschaft in Göttingen, die wir bei unserer Arbeit so oft die von Ihnen gefertigten Werkzeuge erprobt haben, wollen Ihnen den so lang geschuldeten Dank nun am heutigen festlichen Tage aussprechen. Und auch für die kommenden Geschlechter sprechen wir: denn durch Ihre Arbeit ist ein Grund bereitet worden, auf dem jeder bauen muß, der Sicheres und Dauerndes schaffen will.

Dennoch würden wir Ihren Werken nicht gerecht werden, wollten wir sie nur an der Größe ihrer Wirkung oder als Mittel zur Mehrung der Wissenschaft beurteilen. Nein! Wer in Ihre Lehre einzudringen getrachtet hat, der hat etwas an sich Erhabenes geschaut, das seinen unermeßlichen Wert in sich selbst trägt.

Empfangen Sie unserer Aller Huldigung.

Texto presentado a Cantor por los matemáticos de Gotinga con ocasión de la celebración de su 70° aniversario.

nig había conseguido demostrar un importante teorema (que la potencia c del continuo no puede ser un alef *de cierto tipo*)[63] pero no había echado por tierra la creencia fundamental de Cantor. También Zermelo, hombre del entorno de Hilbert, prestó toda su atención al tema, y en septiembre del mismo año redactó una carta que contenía la demostración general del Teorema del Buen Orden, empleando para ello un nuevo postulado: el Axioma de Elección. La publicación de esta carta en los *Mathematische Annalen* desató ríos de tinta, un debate internacional sobre los postulados aceptables en teoría de conjuntos que dio nueva intensidad a la llamada «crisis de fundamentos».[64] Durante dos o tres décadas, fue habitual tratar el postulado de Elección como si fuera más hipotético que el resto de los axiomas de la teoría de conjuntos, e incluso hubo grandes matemáticos que se esforzaron para no emplearlo en absoluto.

En 1912 Cantor fue nombrado doctor *honoris causa* por la Universidad de St. Andrews, y consiguió realizar el viaje sin problemas, acompañado de su hija. Cumplía con esto uno de

63. $c \neq \aleph_\alpha$ si α es un ordinal límite (o sea, por hablar el lenguaje de los *Fundamentos*, un ordinal obtenido mediante el *segundo* principio de generación). Hausdorff explicaba que la fórmula $\aleph_\mu^{\aleph_\alpha} = \aleph_\mu \cdot 2^{\aleph_\alpha}$, que Bernstein había creído demostrar, no es válida cuando μ es un ordinal límite.

64. Sobre todos estos sucesos de 1904 pueden verse más detalles en Ferreirós (2004).

sus sueños, visitar la Gran Bretaña de la que tanto había aprendido a través de su ocupación literaria con la época isabelina, en relación a la polémica Bacon-Shakespeare. Pero fue más emotivo lo ocurrido en 1915, cuando los matemáticos de Gotinga, liderados por Hilbert, organizaron toda una celebración en la casa de los Cantor, en Halle, para festejar debidamente su 70° aniversario. Se hizo entrega de un hermoso busto de mármol, todavía situado en la Universidad de Halle, y los conmovedores discursos despertaron una gran emoción en el viejo Cantor. A menudo había dicho que los alemanes «no le conocían» a pesar de vivir y obrar entre ellos, y que sus esperanzas estaban en el extranjero. En esa ocasión debió sentirse reconciliado. En una carta formal, redactada en nombre de toda la Sociedad Matemática de Gotinga, Carathéodory escribía en un tono apropiado para dirigirse al romántico Cantor:

> ...no haríamos justicia a su obra si sólo quisiéramos juzgarla por la magnitud de su influencia o como un medio para el crecimiento de la ciencia. ¡No! Quien se ha esforzado por penetrar en su teoría, ése ha contemplado algo excelso en sí mismo, que lleva en su interior el valor inmenso que lo caracteriza.[65]

La celebración tuvo lugar el 3 de marzo de 1915; menos de tres años después, el 6 de enero de 1918, el gran matemático moría de un fallo cardíaco.

Hilbert y su amigo Minkowski habían hecho de Cantor un héroe más o menos desde 1895, forjando la imagen de todo un campeón de la matemática moderna, víctima de la persecución del villano Kronecker, caracterizado como un tirano de cortas vistas y acciones malintencionadas.[66] La pregnancia del Problema del Continuo creado por Cantor, su certera visión de las paradojas conjuntistas, su destino trágico de enfermo mental —que reanimaba el viejo mito de que una excesiva proximidad a la verdad se paga con la locura— y su importante papel en la

65. Citado en Meschkowski (1982, 175).

66. No pretendo decir que esta imagen sea enteramente falsa, pero sí desde luego que es propia de una viñeta de cómic, mucho más que una representación de la compleja realidad.

Un joven David Hilbert (1862-1943), hacia la época en que conoció a Cantor y comenzó —animado por Minkowski— a desarrollar su gran admiración por él.

creación de la Unión de Matemáticos Alemanes, todo ello contribuyó mucho a engrandecer su figura a los ojos de Hilbert y su gente. No es casualidad que a Cantor dedicase el primero de los problemas que expuso en 1900 en el Congreso de París: no se trataba sólo de la indudable elegancia y profundidad del Problema del Continuo, sino también de que, al colocarlo en primer lugar, Hilbert enfatizaba su apuesta —la apuesta de Gotinga— por los métodos más modernos en matemáticas. Les enviaba a los dubitativos franceses una señal inequívoca de por dónde debían ir las cosas en el futuro.

Cuando veinticinco años más tarde Hilbert habló con retórica bíblica del «paraíso de Cantor», presentándose como un Adán que se niega a ser expulsado, las poderosas imágenes de la leyenda de Cantor cumplían un gran papel en la defensa de un modo de hacer matemáticas que Hilbert veía amenazado. Un matemático cercano a Hilbert y Klein, Schoenflies, contribuía por aquellos años a afianzar la imagen del Cantor víctima del tirano Kronecker (en artículos de 1922 y 1927, este segundo publicado en *Acta Mathematica* y basado en cartas a Mittag-Leffler), y llegaba incluso a sugerir que la enfermedad maníaco-depresiva había tenido dos causas: el intenso trabajo en vano a propósito de la Hipótesis del Continuo, y la malévola enemistad de su antiguo protector en Berlín.[67] Al emplear el mito de

67. Ambos puntos han sido puestos en duda, sobre la base de evidencia que incluye informes de la clínica de Halle, por los historiadores más cuidadosos: véase Grattan-Guinness (1971), Purkert e Ilgauds (1987). En mi opi-

Cantor en los años 1920, el objetivo principal de Hilbert era evitar que los jóvenes matemáticos se fueran tras el peligroso flautista de Hamelin que era el holandés Brouwer (como lo había hecho ya el mejor discípulo de Hilbert, Hermann Weyl). Cantor y Kronecker en paralelismo con Hilbert y Brower: la libertad de la matemática moderna frente a la reacción conservadora, casi diríamos —recordemos la retórica del paraíso, y el famoso árbol— el Bien frente al Mal.[68]

6. LAS PARADOJAS DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS

En la literatura especializada existe bastante confusión sobre cuándo descubrió Cantor las paradojas de la teoría de conjuntos, e incluso hay quien afirma que no descubrió tal cosa (ya que para él no eran contradicciones de la «verdadera» teoría de conjuntos). La selección de cartas de los años 1897 y 1899 que ustedes podrán leer con detenimiento debe hacer transparente el hecho de que Cantor no sólo planteó con precisión esos argumentos, sino que entendió con toda claridad que suponían una contradicción para la teoría de los conjuntos defendida por autores como Dedekind y Frege. Además, hay buenos motivos para circunscribir al año 1896 el momento en que debió de encontrar las paradojas: fue sólo a comienzos de 1897 cuando las comunicó a otros matemáticos, principalmente a Dedekind y Hilbert. Ya entonces sabía Cantor que la colección de todos los ordinales transfinitos no puede ser un conjunto, pues suponerlo nos lleva a una contradicción estricta (la llamada paradoja de

nión, la importancia del factor Kronecker es indudable, pero bien entendido que Cantor no puede ser presentado como una víctima absolutamente inocente: la correspondencia que traducimos y el propio texto de los *Fundamentos* (con nuestras notas) avalan esta afirmación.

68. Lo triste es que, en los años que siguieron, si hubo alguien que se comportó como el tirano Kronecker, no fue Brouwer, sino más bien Hilbert, al organizar lo que Einstein llamó con desaprobación «la guerra de las ranas y los ratones» para expulsar a Brouwer del comité editorial de *Mathematische Annalen*. Véase el artículo de D. van Dalen, «The War of the Frogs and the Mice, or the Crisis of the *Mathematische Annalen*», *Mathematical Intelligencer* 12 (1990, 17-31).

Burali-Forti), y que lo mismo pasa con la colección de todos los cardinales (la llamada paradoja de Cantor).[69]

6.1. Esto no quita para que la historia del descubrimiento y la aceptación de las paradojas por la *comunidad matemática* fuera bastante complicada. Pues aunque Cantor planteó sus respectivos argumentos a Bernstein, Dedekind, Hilbert y otros, no llegó a cumplir su intención de publicarlos. Las paradojas sólo fueron publicadas y anunciadas a bombo y platillo por Bertrand Russell en su obra *The Principles of Mathematics* (1903).[70] Conviene añadir que entre la influyente comunidad matemática de Gotinga, las paradojas eran ya bien conocidas, y que en realidad la primera indicación pública de su existencia, nada dramática y estimulada por el contacto con Cantor, tuvo lugar en artículos de Hilbert del año 1900:

> Si quisiéramos producir de un modo similar la demostración de la existencia de una colección de todas las potencias (o de todos los alefs de Cantor), este intento no alcanzaría su objetivo: de hecho la colección de todas las potencias no existe, o —según lo expresa G. Cantor— el sistema [System] de todas las potencias es un conjunto no consistente (no disponible).

La base en la que Hilbert apoyaba esta convicción no era otra que las cartas recibidas de Cantor.

Sin embargo, fue sólo en 1903 que las paradojas se convirtieron en centro de la atención internacional. A ello contribuyó sin duda la paradoja de Russell, de carácter muy elemental porque involucra sólo conceptos lógicos básicos y la relación de pertenencia, $\in$. (Se trata de la famosa contradicción de la totalidad de todos los conjuntos que no pertenecen a sí mismos. Si suponemos que dicha totalidad es un conjunto, podremos llamarle $Z = \{x: x \notin x\}$; y sabemos que los conjuntos son a su vez elementos de conjuntos, de

69. Fue Russell quien les dio esos nombres, alguno no muy justificado: véanse Moore y Garciadiego (1981), Garciadiego (1992).

70. Obra que ni lectoras ni lectores no deben confundir con los *Principia Mathematica* posteriores, escritos en colaboración con Whitehead. Si realizan la experiencia de leer ambos trabajos, uno discursivo, el otro plagado de cálculos lógicos, la confusión se les hará imposible.

manera que Z debe pertenecer o no pertenecer a sí mismo. Pero si $Z \in Z$, entonces —revisen los lectores la definición en la frase anterior— $Z \notin Z$; por otro lado, si $Z \notin Z$, entonces cae bajo la definición anterior y se deduce que $Z \in Z$. ¡Contradicción!)

Curiosamente, es algo ya bien sabido que también esta paradoja había sido anticipada por los de Gotinga y concretamente por Zermelo.[71] Años más tarde rememoraba Hilbert que el descubrimiento de la paradoja de Zermelo-Russell «tuvo un efecto verdaderamente catastrófico en el mundo matemático»; al menos lo tuvo en Gotinga, y desde luego en él, que por algún tiempo llegó a pensar —¡terrible desengaño!— que la razón había estado siempre del lado de Kronecker.[72]

Estas contradicciones o —como los gotinguenses gustaban de llamarlas, kantianamente— «antinomias» fueron la desesperación de la mayoría de los expertos en teoría de conjuntos, precisamente autores de la talla de Dedekind, Frege, Hilbert o Russell. Como explica el propio Cantor en sus últimas cartas, Dedekind y quienes pensaban como él basaban la teoría de conjuntos en el principio de comprehensión, que «ingenuamente» aceptaban como axioma. El principio de comprehensión dice que un concepto bien definido (un enunciado $\psi(x)$ con una variable libre, una «función proposicional» en términos de Russell) *determina* un conjunto, en el sentido de que existe el conjunto $\{x: \psi(x)\}$. Ese postulado no tan ingenuo, ni mucho menos «de sentido común», quedó tocado en la línea de flotación por las «antinomias». De ahí la desolación que demostraron los más reflexivos de aquellos autores: Dedekind se negó en 1903 a reeditar su librito (1888), y Frege abandonó para siempre la posición logicista que llevaba más de veinte años desarrollando y afianzando.

71. B. Rang y W. Thomas, «Zermelo's Discovery of the "Russell Paradox"», *Historia Mathematica* 8 (1981), 15-22. No entraremos en más detalles acerca de la rica historia de las paradojas para no recargar el texto (remito a los textos citados en nota y en la bibliografía), pero sí me gustaría expresar con claridad mi opinión de que quien realmente puso la paradoja de Zermelo-Russell en el lugar que le corresponde fue el lógico G. Frege: antes de conocer su reacción, ni Russell ni Hilbert percibieron completamente lo «catastrófico» de la situación.

72. Cita y referencias en Ferreirós (2004, 455).

En cambio, nuestro especulativo personaje recibió las paradojas sin problemas, más bien con la sensación triunfal de que confirmaban las intuiciones que venía desarrollando desde 1883. Tan sin problemas, que enseguida buscó la manera de obtener rendimientos propiamente matemáticos a partir de ellas: concretamente, un intento de demostración del teorema del Buen Orden, muy sugerente aunque no del todo satisfactorio.[73]

6.2. La explicación de esa diferencia entre Cantor y los otros es que la concepción de la teoría de conjuntos presentada en las anotaciones a los *Fundamentos*, y concretamente los lazos que había establecido entre la matemática por un lado, y la metafísica y la teología por otro, hacían admisible para él lo que era inaudito e intolerable para sus colegas.[74] Ya hemos visto que en la anotación 2 establecía una analogía entre las totalidades absolutamente infinitas, como la de todos los ordinales, y nada menos que la divinidad. Resultado de esta analogía es que ninguno de esos «conceptos» debía considerarse accesible al conocimiento humano. El descubrimiento de las antinomias aportaba algo más, la imposibilidad de concebir esos infinitos absolutos como un subgénero del infinito actual. Pero, de todos modos, Cantor disponía de un marco de ideas previo que le permitió reaccionar con naturalidad ante lo que eran contradicciones estrictas, pruebas de contradictoriedad, respecto a otros enfoques.

En una carta a Hilbert de 1897, Cantor afirmaba que ya «hace muchos años» había hecho referencia a esas «totalidades» que no pueden ser consideradas como conjuntos, al hablar de totalidades «absolutamente infinitas».[75] En años recientes, varios autores han ofrecido argumentos en el sentido de que, efectivamente, Cantor había previsto las antinomias *ya* en el momento de redactar los *Grundlagen*.[76] La reconstrucción más convincente es la de Tait, ya que utiliza sólo ideas presentes en

73. Véanse las cartas y los comentarios de Zermelo citados en las notas correspondientes.

74. Dauben (1979), Purkert (1986); véase también Purkert e Ilgauds (1987).

75. Carta de 26 de septiembre de 1897; sólo puede referirse a *Fundamentos*, anotación 2.

76. Purkert (1986), Lavine (1994), Tait (2000).

los *Fundamentos* para montar una paradoja. Si la colección *O* de todos los ordinales fuera un conjunto, no tendría un último elemento, y el segundo principio de generación nos autorizaría a hablar de un siguiente número ordinal o. Según esto, o es mayor que todos los ordinales de *O*, pero a la vez es uno de ellos (porque *O* es el conjunto de *todos* los ordinales), de manera que o > o; y entonces tendríamos una sucesión descendente infinita de ordinales:

$$o > o > o > \ldots,$$

en contradicción con el segundo teorema del § 13 de los *Fundamentos*.

Desde mi punto de vista, sin embargo, todas esas interpretaciones son demasiado optimistas: se basan en evidencia sumamente escasa y discutible, acompañada de interpretaciones sin garantías. Ese teorema del § 13 viene formulado sólo para ordinales de la segunda clase, y no es en absoluto evidente que Cantor se hubiera convencido ya de que es válido para números transfinitos con plena generalidad. Pero hay algo peor. La antinomia planteada por Tait hubiera inmediatamente arrojado dudas sobre la idea que expresa el segundo principio de generación, el cual interviene críticamente al obtenerla: *no podemos* crear un nuevo número siempre que tengamos delante una «sucesión» de ordinales sin último término. Visto esto, y la necesidad de buscar alguna cláusula restrictiva para el segundo principio, Cantor habría encontrado motivos para detener la publicación de los *Fundamentos*.

Por otro lado, si Cantor tenía las antinomias a su disposición en los años 1880, resulta muy raro que no las mencione en ninguna de sus cartas o artículos filosóficos. Más bien, algún escrito sugiere que en 1888 aún no las conocía: en carta a Vivanti de ese año, Cantor habla del libro de Dedekind (1888) sin criticar su tendencia «a fundamentar la aritmética de manera puramente lógica», sino considerándola «loable».[77] Esto resulta interesante por contraste con su apreciación de las cosas diez años más tarde: en la carta a Hilbert de noviembre de 1899, Cantor formula con gran clarividencia el carácter de contradicción que

77. *Briefe*, 302.

las paradojas tienen para la teoría «lógica» de Dedekind, insiste en la «*oposición diametral*» que hay entre dicho planteamiento y el del propio Cantor, y sugiere que reconoció el error de Dedekind «inmediatamente después» de la publicación de su libro. Pero este tipo de implicaciones y aclaraciones no se encuentran en ninguno de sus escritos antes de 1896, y de hecho el enfoque ofrecido en los *Grundlagen* de 1883 parece ser todavía el de una teoría «lógica» de conjuntos.[78]

En su reminiscencia de 1897, Cantor no llega a afirmar que catorce años antes tuviera a su disposición los *argumentos* de las antinomias. Más bien, el argumento que dio en los *Fundamentos* acerca del carácter absoluto de la colección de los ordinales parece *refutar* la idea de que conociera las paradojas. Dice en la anotación 2 que «a cada número suprafinito de cualquiera de las clases numéricas superiores (II), (III), etc., por grande que sea, le sigue una colección de números y clases numéricas que en lo relativo a potencia no se ve reducido en lo más mínimo, comparada con la totalidad de la colección absolutamente infinita de números comenzando por 1». Tait (2000) reconoce que este razonamiento «ultimately makes no sense», y es que, si hubiera captado las antinomias, habría debido comprender que no tiene sentido hablar de la «potencia» del «conjunto» de todos los ordinales mayores que ω, o que otro ordinal cualquiera, ni compararla con la «potencia» del «conjunto» absolutamente infinito de todos ellos.

En un análisis sumamente detallado de las múltiples manifestaciones de Cantor —en cartas y artículos de todo el período— con respecto a lo transfinito y lo Absoluto, Jané (1995) llega a la conclusión de que su posición cambió en un matiz clave hacia 1896. Antes de esa fecha, Cantor concibe lo Absoluto como un infinito *actual*, un dominio real de magnitud o potencia máxima (coherentemente con lo que acabamos de ver en el párrafo anterior). Después, pasa a entender lo Absoluto como algo *irremediablemente potencial*, abierto e incompletable. Esto constituye buena evidencia independiente de que fue hacia

78. Al no desmarcarse de este enfoque, hay motivos para pensar que Cantor no había advertido las antinomias y sus implicaciones. Antes bien lo enfatiza mucho más que el propio Dedekind, aunque ciertamente no en ninguna aplicación práctica, sino en declaraciones generales como las de la anotación 1.

1896 cuando encontró las antinomias. Por si hiciera falta más evidencia, en el artículo de 1892 que ustedes pueden leer, se dice que en los *Fundamentos* de 1883 había demostrado «que la colección de todas las potencias, si las imaginamos ordenadas conforme a su tamaño, forman un «conjunto bien ordenado»». Una idea absurda, propia de algún «ingenuo» partidario de la teoría lógica de conjuntos.

Tanto en 1883 como en 1897 pensaba Cantor que lo absolutamente infinito no es determinable matemáticamente, pero sus razones iniciales eran sólo teológicas, mientras que las finales son *también matemáticas*. Por insistir una vez más: las tesis recogidas en sus anotaciones a *Fundamentos* ofrecieron a Cantor un punto de apoyo para reaccionar frente a las paradojas y motivos para agradecerlas, pero eso no quiere decir que ya entonces las conociera. La evidencia conservada en cartas y documentos se empeña en sugerir que fue sólo hacia 1896 cuando se hizo consciente de esas tensiones bajo la forma concreta de las paradojas.

6.3. En una carta a Mittag-Leffler de mayo de 1883, hablando del teorema de Cantor-Bernstein (y de cómo lo había formulado ya en 1878), decía nuestro hombre:

> Al escribirlo en aquel momento, estaba convencido de su corrección gracias a una especie de intuición indescriptible [eine Art von unbeschreiblicher Intuition], aunque sabía muy bien que el teorema requería una demostración; mas durante años he sido incapaz de encontrar esa demostración. Sólo desde que he descubierto y encontrado los números suprafinitos, desde que he podido definir las potencias sucesivamente crecientes, que se dan en la naturaleza, estoy en posesión de la demostración.[79]

Si hubo alguna anticipación de las antinomias en los *Fundamentos*, parece que fue más bien, en palabras de Cantor, «una especie de intuición indescriptible».

79. *Briefe*, 119. Lo último no era cierto: tenía una demostración para casos particulares —por ejemplo, para conjuntos equipotentes con (II), *Fundamentos* § 13—, pero no una demostración general; él mismo lo reconocería en las *Contribuciones* de 1895.

Pero hay algo que debe quedar claro, tras la anterior discusión. Al introducir los números ordinales transfinitos, siquiera a un nivel intuitivo, Cantor disponía de un nuevo dominio donde aplicar, desarrollar y explorar sus ideas conjuntistas. Este nuevo dominio, con su carácter abierto y radicalmente maximizador, tenía el potencial de generar graves tensiones dentro de la teoría de conjuntos. Hasta entonces Cantor sólo podía pensar en conjuntos de números o de puntos o de funciones; pero al investigar los ordinales acabaría haciéndose patente la necesidad de imponer restricciones en teoría de conjuntos, so pena de caer en contradicción.

Además, las anotaciones a los *Fundamentos* muestran con claridad que, tras haber escrito el texto principal de este escrito, Cantor comenzó a alejarse de manera irreparable de la visión «lógica» de los conjuntos, andando el camino hacia la concepción plenamente realista o platónica que pasó a convertirse en «el fundamento de su investigación conjuntista» (según dice en la citada carta a Hilbert). La teoría de conjuntos no podía basarse en ningún principio meramente lógico acerca de los conceptos o predicados como base para la formación de conjuntos (el principio de comprehensión). La teoría de conjuntos era algo mucho más elevado, y su base última estaba en la verdadera metafísica y teología, que sigue la tradición de Platón, Leibniz y Spinoza.

Me gustaría terminar citando las palabras con las que Bernstein aclaró a los editores de las obras de Dedekind cómo transcurrió la visita que hizo a éste, por Pentecostés del año 1897 (véase la carta de Dedekind, 29-08-1899):

> La mencionada visita fue motivada por Cantor. Éste había encontrado poco antes la paradoja del conjunto [*sic*] de todos los números ordinales, concretamente al intentar demostrar que todo conjunto puede ser bien ordenado —demostración que intentaba llevar a cabo con reflexiones algo similares a las que Zermelo empleó posteriormente, sólo que evitando los conjuntos inconsistentes, en su primera demostración del Buen Orden [1904]—. Cantor entendió perfectamente que la paradoja que había encontrado también se aplica al conjunto [*sic*] de todas las cosas. Dedekind había utilizado éste en su escrito «¿Qué son y para qué sirven los números?» para demostrar la existencia de

> conjuntos infinitos, y de tal manera que, según el desarrollo de su escrito, la definición de los números depende de la existencia no contradictoria de esos conjuntos. Cantor le había pedido ya por carta una toma de posición al respecto, y, como ésta no llegaba, probablemente a causa de la severa enfermedad que Dedekind padeció en el invierno de 1896/97, ahora me encargaba de dar lugar a ella tratando el asunto de palabra.
>
> Sin embargo, Dedekind no había llegado entonces a una toma de posición definitiva, y me confesó que en sus reflexiones había llegado casi a dudar si el pensamiento humano es plenamente racional.

Palabras ciertamente llamativas en alguien tan ponderado y comedido como el matemático de Brunswick... Pero el informe de Bernstein no termina aquí; las palabras finales son especialmente interesantes en el contexto de la biografía de Cantor:

> El episodio siguiente debería ser de especial interés: respecto al concepto de conjunto, Dedekind me manifestó que se imaginaba un conjunto como un saco cerrado, que contiene cosas completamente determinadas, pero de modo que uno no las ve, y no sabe nada de ellas salvo que existen y están bien determinadas. Algún tiempo después Cantor dio a conocer su manera de imaginarse un conjunto: elevó bien alta su colosal figura, describió con el brazo extendido un gesto magnífico, y dijo con una mirada dirigida a lo indeterminado: «Me imagino un conjunto como un abismo».

7. NOTA SOBRE LA TRADUCCIÓN

Conviene comentar ciertos puntos tocantes a cuestiones terminológicas y de estilo en la traducción que ofrecemos. Son bien conocidas las dificultades de traducción que ofrece el alemán, y particularmente cuando es de carácter filosófico. Nuestra versión ha huido intencionadamente de ser «germanizante», tratando de ofrecer en un castellano tan armonioso como hemos podido las ideas del autor. Se ha intentado siempre recoger las matizaciones y los énfasis del original, pero no se ha buscado una literalidad total. A quien desee realizar un análisis detallado o filológico de los textos, lo remitimos, como no podía ser menos, al original alemán.

Con lo que acabo de decir está muy relacionada la actitud que hemos adoptado ante la traducción de algunos términos importantes y/o difíciles. Me referiré sobre todo al caso de los *Grundlagen*. En aquellos casos en los que el uso terminológico responde a una tradición en la obra del propio Cantor, se ha intentado ser fiel al original. Por el contrario, cuando se trata de un uso ocasional, presente sólo en los *Fundamentos*, y especialmente si resultaba difícil encontrar una traducción adecuada, nos hemos sentido libres de buscar una solución adecuada a nuestro idioma.

Todos los estudiosos de los *Grundlagen* se tropiezan con el incómodo término «Anzahl». Cantor le da el sentido técnico de número ordinal —curiosamente, por las fechas en que Frege le daba el sentido opuesto de cardinal—, aunque a menudo lo emplea en el sentido usual de cantidad, número. La versión al castellano es difícil, sobre todo teniendo en cuenta los derivados del término, y aquí nos hemos decantado por «enumeración». Algunos autores anglosajones dejan el término sin traducir, pero nos ha parecido que esto no se justifica por la importancia de su empleo ni por su impacto en la interpretación del texto.

Otro caso incómodo es, curiosamente, el uso del adjetivo «real» en «reale ganze Zahl». No se puede traducir por «número real entero» porque la palabra «real» tiene un uso perfectamente establecido en matemática. Cantor salvaba este escollo porque número real se dice en alemán «reelle Zahl», distinguiéndose entre «reell» y «real». Ya que no se puede hacer un juego de palabras similar en castellano, hemos optado por traducir «real» como «verdadero»: nuestro autor dice que los transfinitos son «verdaderos números enteros», tan *reales* como 1, 2 o 3.

En dos casos importantes nos hemos permitido simplificar. Para hablar de aplicaciones biunívocas, Cantor emplea una expresión compleja, diciendo que dos conjuntos pueden ser coordinados uno con otro «unívocamente de modo recíproco [gegenseitig eindeutig], elemento a elemento». Nos ha parecido que no se perdía nada al modernizar su lenguaje ligeramente y traducir «biunívocamente», ya que el concepto aparece en su obra con toda nitidez. Por otro lado, hemos traducido «Theil», no por el equívoco «parte», sino por el más preciso «subcon-

junto». Seguramente sabe el lector que las distinciones explícitas respecto a esa noción, como a propósito de pertenencia e inclusión, se deben a Peano y Frege.

En cambio, consideraciones acerca de la importancia y tradición del término en Cantor aconsejaban ser literal con la palabra «Mächtigkeit», traducida como «potencia». Quizá hubiera sido más fácil para el lector actual haberla traducido por «cardinalidad», ya que estamos hablando del término para referirse a la cardinalidad de un conjunto; pero en todo caso resulta sencillo acostumbrarse al cambio. Sabemos que el término fue adaptado a partir de escritos de Steiner sobre geometría, pero quizá no fueran ajenas a la decisión de Cantor las reminiscencias teológicas de la palabra: la omnipotencia divina se dice «allmächtigkeit».

Finalmente, hay que decir unas palabras sobre «Menge» y «Mannigfaltigkeit». Durante los años 1880, Cantor se refería a la teoría de conjuntos empleando el término —inspirado en Riemann— «Mannigfaltigkeitslehre». A la vez, como escribir «Mannigfaltigkeit» se hacía largo y tedioso, hablaba frecuentemente de «Mengen» de puntos o de números, y esta última palabra es la que acabó imponiéndose en lengua alemana. Lo literal hubiera sido distinguir entre «variedad» (Mannigfaltigkeit) y «conjunto» (Menge),[80] pero nos ha parecido innecesario mantener esta distinción. Máxime cuando se debe a dificultades de buscar terminología en la lengua alemana, que ni Cantor ni Dedekind sentían al pasar a lenguas romances.[81] Sólo en algún lugar aislado, donde resultaba particularmente adecuado, y por recordar al lector que el uso lingüístico de Cantor y otros seguía en estado de flujo, hemos mantenido la expresión «teoría de variedades».

80. Aunque mejor, si hablamos de literalidad, sería en este último caso poner «montón».

81. Por esta época, ambos proponían usar «ensemble» en francés, traduciendo con este término los respectivos «Mannigfaltigkeit» y «System».

BIBLIOGRAFÍA

Reinhard BÖLLING. 1997. «Georg Cantor – Ausgewählte Aspekte seiner Biographie», *Jahresber. der DMV* 99, 49-82.

Georg CANTOR. *Abhandlungen*: *Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, ed. E. Zermelo, Berlin, Springer, 1932.

— *Briefe*: *Georg Cantor: Briefe*, ed. H. Meschkowski y W. Nilson, Berlin, Springer, 1991.

— 1874. «Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen», *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 77. En *Abhandlungen*, 115-118.

— 1878. «Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre», *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 84. En *Abhandlungen*, 119-133.

— 1879/1884. «Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten», *Mathematische Annalen* 15 (1879), 17 (1880), 20 (1882), 21 (1883), 23 (1884). En *Abhandlungen*, 139-244.

— 1883. *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, Leipzig, Teubner. En *Abhandlungen*, 165-208 (sin prefacio).

— 1892. «Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre», *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 1. En *Abhandlungen*, 278-280.

— 1895/1897. «Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre», *Mathematische Annalen* 46 (1895) y 49 (1897). En *Abhandlungen*, 282-351.

— 1915. *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, Chicago y Londres, Open Court. Reimpreso en Nueva York, Dover, 1955.

— 1984. *Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten: Arbeiten zur Mengenlehre aus den Jahren 1872-1884*, facsímil ed. por G. Asser, Leipzig, Teubner.

Joseph DAUBEN. 1979. *Georg Cantor. His Mathematics and Philosophy of the Infinite*, Cambridge, Harvard University Press.

Richard DEDEKIND. 1888. *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Braunschweig, Vieweg (3ª ed. 1911). Edición española de J. Ferreirós en Madrid, Alianza, 1998.

Paul DUGAC. 1976. *R. Dedekind et les fondements des mathématiques*, Paris, Vrin.

José FERREIRÓS. 1993. «On the Relations between Cantor and Dedekind», *Historia Mathematica* 20 (1993), 343-363.
— 1995. «"What Fermented in Me for Years": Cantor's Discovery of Transfinite Numbers», *Historia Mathematica* 22, 33-42.
— 1999. *Labyrinth of Thought. A history of set theory and its role in modern mathematics*, Basel/Boston, Birkhäuser.
— 2003. «Del neohumanismo al organicismo: Gauss, Cantor y la matemática pura», en J. Montesinos *et al.*, *Ciencia y Romanticismo* (Fundación Orotava de Historia de la Ciencia, Tenerife, 2003).
— 2004. «The Motives Behind Cantor's Set Theory: Physical, biological and philosophical questions». *Science in Context* 17, nº 1/2 (2004), 1-35.
— 2004a. «Un episodio de la crisis de fundamentos: 1904», *La Gaceta de la Real Sociedad Española de Matemáticas* 7, nº 2 (2004), 449-467.
Abraham FRAENKEL. 1928. *Einleitung in die Mengenlehre*, 3ª edición aumentada, Berlín, Springer.
— 1930. «Georg Cantor», *Jahresbericht der DMV* 39, 189–266.
Abraham FRAENKEL, Y. BAR-HILLEL y A. LEVY. 1973. *Foundations of set theory*, Amsterdam, North-Holland.
Gottlob FREGE. 1996. *Escritos filosóficos*, edición de J. Mosterín, Barcelona, Crítica.
Alejandro GARCIADIEGO. 1992. *Bertrand Russell y los orígenes de las paradojas de la teoría de conjuntos*, Madrid, Alianza.
Ivor GRATTAN-GUINNESS. 1970. «An unpublished paper by Georg Cantor: Principien einer Theorie der Ordnungstypen. Erste Mitteilung», *Acta Mathematica* 124, 65-107.
— 1971. «Towards a Biography of Georg Cantor», *Annals of Science* 27, 345-391.
Grattan-Guinness 1974: «The rediscovery of the Cantor–Dedekind correspondence», *Jahresbericht der DMV* 76, 104–139.
Michael HALLETT. 1984. *Cantorian Set Theory and Limitation of Size*, Oxford, Clarendon.
David HILBERT. 1930. *Grundlagen der Geometrie*, 7ª ed. (1ª de 1899, 2ª de 1903), Leipzig, Teubner. Edición española de J. M. Sánchez Ron, Madrid, CSIC, 1996.
— 1993. *Fundamentos de las matemáticas*, edición de Carlos Álvarez y Luis Felipe Segura, México, UNAM.
Jean Van HEIJENOORT. 1967. *From Frege to Gödel. A source book*

in mathematical logic, 1879–1931 (Cambridge, Harvard Univesity Press; reedición en paperback, 2002).

Ignacio JANÉ. 1995. «The Role of the Absolute Infinite in Cantor's Conception of Set», *Erkenntnis* 42, 375-402.

Shaughan LAVINE. 1994. *Understanding the Infinite*, Harvard University Press.

Herbert MESCHKOWSKI. 1981. «Cantor, Georg», en C. Gillispie, ed., *Dictionary of Scientific Biography*, vol. 2, 52-58.

— 1983. *Georg Cantor. Leben, Werk und Wirkung*, Mannheim, Bibliographisches Institut.

Gregory H. MOORE. 1989. «Towards a History of Cantor's Continuum Problem», en D. Rowe y J. McCleary, eds., *The History of Modern Mathematics Vol. I* (Boston/London, Academic Press, 1989), 79-121.

Gregory H. MOORE. 1982. *Zermelo's Axiom of Choice. Its Origins, Development and Influence*, Berlin, Springer.

Gregory H. MOORE y A. GARCIADIEGO. 1981. «Burali-Forti's Paradox: A reappraisal of its origins», *Historia Mathematica* 8, 319-350.

Emmy NOETHER y J. CAVAILLÈS, eds. *Cantor-Dedekind Briefwechsel*, Paris, Hermann, 1937.

Walter PURKERT. 1986. «Georg Cantor und die Antinomien der Mengenlehre», *Bulletin de la Société Mathématique de Belgique* 38, 313-327.

Walter PURKERT y H. J. ILGAUDS. 1987. *Georg Cantor 1845-1918*, Basel/Boston, Birkhäuser.

Arthur M. SCHOENFLIES. 1922. «Zur Erinnerung an Georg Cantor», *Jahresbericht der DMV* 31, 97–106.

— 1927. «Die Krisis in Cantor's mathematischem Schaffen», *Acta Mathematica* 50, 1–23.

William TAIT. 2000. «Cantor's Grundlagen and the Paradoxes of Set Theory», en G. Sher y R. Tieszen, eds. *Between Logic and Intuition: Essays in honor of Ch. Parsons*, Cambridge University Press, 2000, p. 269-290.

Ernst ZERMELO. 1908. «Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre», *Mathematische Annalen* 65, 261–281. Traducción inglesa en Van Heijenoort (1967), 199–215.

SOBRE LA ORGANIZACIÓN DE LOS TEXTOS

Lectoras y lectores encontrarán, en lo que sigue, los textos y cartas de Cantor en un orden que no es estrictamente cronológico. Para facilitar el acceso al material, hemos querido situar en primer lugar los Fundamentos para una teoría general de conjuntos *(1883), seguidos del pequeño artículo «Sobre una cuestión elemental...» (1892), que constituye un complemento de gran importancia al texto anterior. Tras estos dos trabajos, que pueden considerarse como el «plato fuerte» de la presente edición, viene toda la serie de cartas a Dedekind, Hilbert, Kronecker, etc., comenzando con material de 1872 y finalizando con la célebre discusión de las paradojas en 1899.*

Debo prevenir al lector de que la estructura de anotaciones al texto de los Fundamentos *es bastante compleja. El propio Cantor produjo un escrito en el que había notas al pie y anotaciones al final (éstas fueron añadidos de última hora); las primeras van indicadas con asteriscos (*), las otras con números. Ahora se añaden a todo esto las notas del editor, cuyas llamadas son números entre corchetes [n] —a excepción de algunas aclaraciones puntuales, también con asterisco y al pie—, y que para facilitar su manejo hemos impreso también al final del texto. Cuando hay que hacer referencia a unas y otras, distinguiremos las «anotaciones» de Cantor (únicas a las que asocio esa palabra) de las «notas» del editor.*

Como ustedes verán, entre las cartas se encuentra también la traducción del artículo «Sobre una propiedad de la colección...» (1874), en el cual Cantor demostró que el conjunto de los números reales tiene una potencia superior al de los naturales. Nos pareció preferible dejarlo en esta situación, ya que —según comprobarán— guarda relación muy directa con las cartas que intercambiaron Dedekind y Cantor.

En resumen, los lectores pueden optar entre dos maneras distintas de dirigir sus pasos: una posibilidad es la lectura siguiendo el orden en que les proponemos el material, comenzando in medias res, *por así decir; la otra es elegir un ordenamiento estrictamente cronológico. En este último caso, se comenzaría con las cartas a Dedekind de 1872/1873, y sólo tras haber leído la carta de noviembre de 1882 se pasaría al contenido de los* Fundamentos. *Ni que decir tiene que las lectoras deben sentirse muy libres de elegir cualquiera de estas opciones, o sus propias vías alternativas.*

Los textos publicados por el propio Cantor se han tomado de sus Gesammelte Abhandlungen *(editados por Zermelo en 1932), cotejados siempre que ha sido posible con las versiones originales de los artículos (especialmente empleando Cantor, 1984). En cuanto a las cartas, provienen de las siguientes obras: los propios* Abhandlungen*; el* Cantor-Dedekind Briefwechsel *editado por Noether y Cavaillès (1937), complementado con la obra de Dugac,* R. Dedekind et les fondements des mathématiques *(1976); los libros sobre Cantor de Meschkowski (*Georg Cantor. Leben, Werk und Wirkung, *Mannheim, Bibliographisches Institut, 1983) y de Purkert e Ilgauds (*Georg Cantor 1845-1918, *Basilea, Boston, Birkhäuser, 1987); y finalmente, la copiosa —pero no completa— selección de cartas editada por Meschkowski y Nilson,* Georg Cantor: Briefe *(1991).*

Indicaremos aquí también alguna bibliografía básica a la que se hace referencia abreviada en las notas. Igual que en la introducción, Abhandlungen *denota las obras de Cantor editadas por Zermelo (1932) y* Briefe *se refiere a la edición de cartas selectas editada por Meschkowski y Nilson (1991). También hay referencias frecuentes a la obra de Dugac (1976):* Dedekind et les fondements des mathématiques, *y a mi edición de escritos de Dedekind (1998):* ¿Qué son y para qué sirven los números?.

GRUNDLAGEN

EINER

ALLGEMEINEN

MANNICHFALTIGKEITSLEHRE.

EIN

MATHEMATISCH-PHILOSOPHISCHER VERSUCH

IN DER

LEHRE DES UNENDLICHEN.

VON

Dr. GEORG CANTOR,

ORDENTLICHER PROFESSOR A. D. UNIVERSITÄT HALLE-WITTENBERG.

LEIPZIG,

COMMISSIONS-VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1883.

Portada de los *Fundamentos* de Cantor en la edición de Teubner, Leipzig, 1883.

FUNDAMENTOS
PARA UNA
TEORÍA GENERAL DE CONJUNTOS.
UNA
INVESTIGACIÓN MATEMÁTICO-FILOSÓFICA
SOBRE LA
TEORÍA DEL INFINITO

PREFACIO

El presente tratado aparecerá en breve en los *Mathematische Annalen* como el quinto número de un artículo titulado «Sobre variedades de puntos lineales e infinitas»; los primeros cuatro números se encuentran en los volúmenes XV, XVII, XX y XXI de la misma revista. Todos estos trabajos están conectados con dos artículos que he publicado en los volúmenes LXXVII y LXXXIV del *Journal [für die reine und angewandte Mathematik]* de Borchardt, en los cuales se pueden ya encontrar las principales ideas que me han guiado en la teoría de conjuntos.[1] Puesto que el presente ensayo lleva el asunto mucho más lejos, y puesto que su tesis principal es independiente de los artículos precedentes, decidí publicarlo separadamente bajo un título más adecuado a su contenido.

Ya que entrego estas páginas al público, debo mencionar que las escribí principalmente para dos tipos de lectores: para filósofos que han seguido el desarrollo de las matemáticas hasta los tiempos más recientes, y para matemáticos que están fami-

liarizados con los resultados más importantes, antiguos y modernos, de la filosofía.

Sé muy bien que el tema que discuto ha dado lugar en todos los tiempos a las más variadas opiniones y concepciones, y que ni matemáticos ni filósofos han logrado un acuerdo sobre todos los puntos. Por eso no creo que, en un tema tan difícil, complicado y omniabarcante como el infinito, haya dicho yo la última palabra. Pero, puesto que tras muchos años de investigar en esta materia he llegado a convicciones definidas, y puesto que en el curso de mis estudios estas convicciones no han vacilado, sino que se han establecido más firmemente, pensé que tenía la obligación de ponerlas en orden y darlas a conocer.

Quizá de esta forma haya encontrado y expresado la verdad objetiva que he estado esforzándome en descubrir.

Halle, Navidades de 1882

EL AUTOR

§ 1.

La precedente exposición de mis investigaciones en teoría de conjuntos[1] ha llegado a un punto en el que su continuación depende de una extensión del verdadero concepto de número más allá de los límites conocidos, y esta extensión va en una dirección que hasta donde yo sé no había sido explorada antes por nadie.

La dependencia en que me veo respecto a esta extensión del concepto de número es tan grande, que sin esta última apenas me sería posible dar sin violencia el menor paso adelante en la teoría de conjuntos; valga esta circunstancia como justificación, o si es necesario como excusa, por la introducción de ideas aparentemente extrañas en mis consideraciones. Pues se trata de una extensión o prosecución de la serie de los verdaderos números más allá del infinito; por atrevido que esto pueda parecer, estoy en condiciones de expresar no sólo la esperanza, sino la firme convicción de que con el tiempo esta extensión habrá de verse como algo totalmente simple, apropiado y natural. Al hacerlo no me oculto en absoluto que con esta empresa me sitúo en una cierta oposición respecto a intuiciones ampliamente difundidas acerca del infinito matemático, y respecto a puntos de vista sobre la esencia de las magnitudes numéricas defendidos a menudo.

Por lo que hace al infinito matemático, en tanto que éste ha encontrado una aplicación justificada en la ciencia y ha sido de utilidad para ella, me parece que hasta ahora ha aparecido principalmente en el papel de una cantidad variable que o bien crece más allá de todos los límites o bien se hace tan pequeña como se desee, pero siempre continúa siendo finita. A este infinito lo llamo *infinito impropio*.

Pero en los últimos tiempos se ha desarrollado, tanto en geometría como particularmente en la teoría de funciones, otro tipo de conceptos del infinito igualmente justificado. Por ejemplo, en la investigación de una función analítica de variable compleja se ha hecho necesario y habitual imaginar, en el plano que representa la variable compleja, un único punto situado en el infinito (esto es, un punto infinitamente distante pero definido) y examinar el comportamiento de la función en el entorno de ese punto, igual que en el entorno de otro punto cualquiera.[2] Resulta así que en el entorno del punto infinitamente distante la función muestra exactamente los mismos comportamientos que en cualquier otro punto situado en la región finita, de modo que en este caso estamos plenamente justificados para pensar en el infinito como situado en un punto completamente determinado.

Cuando el infinito aparece en esta forma definida lo llamo *infinito propio.*

El infinito matemático, en ambas formas, ha llevado a los más grandes progresos en geometría, en análisis y en física matemática, pero esas dos formas de aparición deben ser cuidadosamente distinguidas para comprender lo que sigue.

Bajo su primera forma, el infinito impropio, se presenta como algo finito variable; en la otra forma, lo que yo llamo el infinito propio, aparece como un infinito completamente determinado. Los verdaderos números infinitos, que definiré en lo que sigue (y a los que me vi llevado hace muchos años, sin llegar a ser claramente consciente de que se trataba de números concretos con significado real)* no tienen absolutamente nada en común con la primera de estas dos formas, con el infinito impropio. Antes bien, poseen el mismo carácter de determinación que encontramos en los puntos infinitamente distantes de la teoría de funciones analíticas; esto es, pertenecen a las formas y afecciones del infinito propio. Pero mientras el punto en el infinito del plano de los números complejos se encuentra solo frente a todos los puntos situados en la región finita, aquí obtene-

* Hasta ahora los llamé «símbolos de infinitud definidos y determinados», compárese *Math. Ann.* vol. XVII p. 357, vol. XX p. 113, vol. XXI p. 54. [*N. del a.* Véase *Abhandlungen*, pp. 147, 149, 160, respectivamente.]

mos no ya un solo número infinito, sino una secuencia infinita de números, los cuales están claramente diferenciados unos de otros, y mantienen relaciones aritméticas regulares tanto entre ellos como con los enteros finitos. Estas relaciones no son tales que puedan ser reducidas esencialmente a las relaciones de los números finitos entre sí; efectivamente este fenómeno puede aparecer frecuentemente, pero sólo en las diferentes intensidades y formas del infinito impropio, por ejemplo en funciones de una variable x que se hacen infinitamente grandes o infinitamente pequeñas, en caso de que en su crecimiento infinito adopten órdenes finitos determinados.[3] Tales relaciones de hecho sólo pueden ser consideradas como relaciones encubiertas de lo finito, o en todo caso como inmediatamente reductibles a lo finito; por el contrario, las leyes de los números enteros propiamente infinitos, que definiremos, son diferentes desde la base de las dependencias que reinan en lo finito, mas con esto no se excluye que los números reales finitos puedan recibir ciertas nuevas determinaciones con la ayuda de los números determinados infinitos.

Los nuevos números infinitos determinados serán definidos con la ayuda de *dos principios de generación* por cuya acción combinada es posible traspasar cualquier barrera en la formación conceptual de los verdaderos números. Pero afortunadamente, como ya veremos, se opone a ellos un *tercer* principio al que yo llamo *principio de restricción* o de *limitación*; éste impone sucesivamente ciertas restricciones en el proceso absolutamente ilimitado de formación, de modo que obtenemos segmentos naturales en la secuencia absolutamente infinita de enteros, segmentos a los que llamo *clases numéricas*.

La *primera* clase numérica (I) es el conjunto de los números enteros finitos $1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots$; le sigue la *segunda* clase numérica (II), consistente en ciertos números infinitos que se siguen unos a otros en una determinada sucesión; tan pronto como la segunda clase numérica ha sido definida, se llega a la tercera, luego a la cuarta, y así sucesivamente.[4]

La introducción de los nuevos números enteros me parece, ante todo, de la mayor importancia para el desarrollo y refinamiento del concepto de potencia, que introduje en mis primeros artículos (*Journal für die reine und die angewandte Mathematik*, vol. 77, p. 257, vol 84, p. 242) y que he aplicado con

frecuencia en los números precedentes de este ensayo. Conforme a este concepto, a todo conjunto bien definido le corresponde una potencia determinada, de modo que dos conjuntos tienen la misma potencia si se pueden coordinar uno con otro, elemento a elemento, biunívocamente.

Para conjuntos finitos, la potencia coincide con la *enumeración* de los elementos;[5] pues, como es sabido, tales conjuntos dan lugar a la misma enumeración de sus elementos bajo cualquier ordenación.

Para conjuntos infinitos, por el contrario, no se había hablado en absoluto hasta ahora, ni en mis trabajos ni en otro lugar, de una *enumeración* definida de sus elementos, aunque se les podía adscribir una *potencia* determinada, enteramente independiente de su orden.

Fue fácil mostrar que la potencia más pequeña de conjuntos infinitos debe asignarse a aquellos que pueden ser coordinados biunívocamente con la primera clase numérica, y consecuentemente tienen la misma potencia que ella. Pero carecíamos hasta ahora de una definición igualmente simple y natural de las potencias superiores.

Nuestras ya mencionadas clases numéricas de verdaderos números infinitos y determinados prueban ahora ser los representantes naturales, que se nos ofrecen de forma unificada, de la secuencia regular de potencias crecientes de conjuntos bien definidos. Mostraré de la forma más clara que la potencia de la segunda clase numérica (II) no es sólo diferente de la potencia de la primera clase numérica, sino que es también de hecho la potencia inmediatamente superior; podemos por tanto llamarla la segunda potencia o la potencia de la segunda clase. Similarmente, de la tercera clase de números resulta la definición de la tercera potencia o potencia de la tercera clase, etc., etc.

§ 2.

Otro gran beneficio atribuible a los nuevos números consiste, para mí, en un *nuevo* concepto que todavía no había surgido, a saber, el concepto de la *enumeración* de los elementos de un conjunto infinito *bien ordenado*. Puesto que este concepto que-

da expresado siempre por un número completamente determinado de nuestro dominio numérico ampliado, con sólo que la ordenación de los elementos del conjunto, que pronto definiremos, esté determinada; y puesto que, por otro lado, el concepto de enumeración recibe una representación inmediata concreta [gegenständlich] en nuestra intuición interna; así, a través de esta conexión entre enumeración y número, la realidad que yo afirmo para estos últimos queda probada, incluso en el caso de que sean infinitos y determinados.

Entenderemos por conjunto *bien ordenado* todo conjunto bien definido en el cual los elementos están enlazados unos con otros por medio de una sucesión determinada, según la cual exista un *primer* elemento del conjunto, y a cada uno de los elementos (supuesto que no sea el último en la sucesión) le siga otro elemento determinado, e igualmente a todo subconjunto arbitrario de elementos, finito o infinito, le corresponda un elemento determinado que es el *inmediato* sucesor a todos ellos en la sucesión (a menos que no haya absolutamente ninguno en la sucesión que los siga a todos ellos).[6] Diremos ahora que dos conjuntos «bien ordenados» tienen la misma *enumeración* (con respecto a las sucesiones dadas) cuando es posible una coordinación biunívoca tal que, si E y F son dos elementos cualesquiera de un conjunto, y E_1 y F_1 los correspondientes elementos del otro, entonces la posición de E y F en la sucesión del primer conjunto siempre concuerda con la posición de E_1 y F_1 en la sucesión del segundo conjunto; esto es, que cuando E precede a F en la sucesión del primer conjunto, entonces E_1 precede también a F_1 en la sucesión del segundo conjunto. Esta correlación, caso de que sea posible, está siempre, como uno puede ver fácilmente, completamente determinada; y puesto que en la serie ampliada de números hay siempre un número α, y sólo uno, tal que los números que le *preceden* en la sucesión natural (de 1 en adelante) tienen la misma enumeración, será necesario que la enumeración de ambos conjuntos «bien ordenados» se ponga igual precisamente a α, cuando α sea un número infinitamente grande, e igual al número $\alpha-1$, que precede inmediatamente a α, si α es un entero finito.

La diferencia esencial entre conjuntos finitos e infinitos resulta ser ahora que un conjunto finito presenta la misma enu-

meración de elementos para toda sucesión que uno pueda dar a sus elementos; por el contrario, un conjunto que consta de infinitos elementos dará lugar en general a distintas enumeraciones, dependiendo de la sucesión que uno dé a sus elementos. La *potencia* de un conjunto es, como vimos, un atributo suyo independiente del orden; pero la *enumeración* del conjunto se muestra, tan pronto como tratamos con conjuntos infinitos, como un factor que en general depende de una sucesión dada de los elementos. Con todo, incluso para conjuntos infinitos existe una cierta conexión entre la *potencia* del conjunto y la *enumeración* de sus elementos determinada por una sucesión dada.

Si tomamos en primer lugar un conjunto que tenga la potencia de la primera clase y damos a sus elementos *cualquier* sucesión determinada, de modo que resulte un conjunto «bien ordenado», entonces su enumeración es siempre un determinado número de la *segunda* clase numérica, y nunca puede ser determinada por un número de ninguna otra clase que la segunda. Por otro lado, todo conjunto de la primera potencia puede ser ordenado en una sucesión tal que su enumeración, con respecto a esta sucesión, resulte igual a cualquier número previamente dado de la segunda clase numérica. Podemos expresar estas proposiciones como sigue: todo conjunto de la potencia de la *primera* clase es *enumerable mediante* números de la *segunda* clase numérica y sólo *mediante* tales números; y además al conjunto puede dársele una sucesión de sus elementos tal que pueda ser enumerado en esta sucesión *mediante* un número de la segunda clase numérica arbitrariamente elegido, el cual indicará la enumeración de los elementos del conjunto con respecto a aquella sucesión.

Para conjuntos de potencias superiores resultan válidas leyes análogas. Así todo conjunto bien definido de la potencia de la *segunda* clase es enumerable *mediante* números de la *tercera* clase numérica y sólo *mediante* tales números, y además se puede dar al conjunto una sucesión tal de sus elementos que sea enumerado en esta sucesión por un número de la *tercera* clase numérica *arbitrariamente elegido*,* el cual determina la enumeración de los elementos del conjunto con respecto a aquella sucesión.

* Lo que en los primeros números de este artículo llamé «enumerable» no es, de acuerdo con la definición más precisa y general que acabo de intro-

§ 3.

El concepto de *conjunto bien ordenado* resulta ser fundamental para la entera teoría de conjuntos. Siempre resulta posible poner cualquier conjunto *bien definido* en la *forma* de un conjunto *bien ordenado*; a esta ley del pensamiento, que en mi opinión es fundamental y rica en consecuencias, y especialmente notable en razón de su validez general, retornaré en un artículo posterior.[7] Aquí me limito a mostrar cómo del concepto de conjunto *bien ordenado* resultan de la manera más simple las operaciones fundamentales de los números enteros, ya sean estos finitos o infinitos determinados, y cómo las leyes que los gobiernan pueden ser derivadas de la inmediata intuición interna con certeza apodíctica. Sean dados por de pronto dos conjuntos *bien ordenados* M y M_1 cuyas enumeraciónes correspondan a los números α y β, entonces $M+M_1$ es también un conjunto *bien ordenado*, el cual surge si ponemos primero el conjunto M y a continuación de él el conjunto M_1, y lo unimos con aquél.[8] Al conjunto $M+M_1$ le corresponde por tanto, con respecto a la sucesión resultante de sus elementos, un número determinado como enumeración; llamaremos a este número la suma de α y β y lo designaremos por $\alpha+\beta$. Vemos inmediatamente que si α y β no son ambos finitos, entonces $\alpha+\beta$ es en general diferente de $\beta+\alpha$. Ya con la adición, la ley *conmutativa* deja pues de ser válida en general. Resulta tan simple ahora formar el concepto de la suma de varios sumandos dados en una determinada secuencia, donde la secuencia misma puede ser propiamente infinita, que no necesito aquí entrar en más detalles. Sólo resaltaré que la ley *asociativa* es válida en general, y tenemos en particular que $\alpha+(\beta+\gamma) = (\alpha+\beta)+\gamma$.

Si se toma una sucesión, determinada por un número β, de varios conjuntos todos iguales y similarmente ordenados, y tales que la enumeración de los elementos de cada uno de ellos sea igual a α, entonces uno obtiene un nuevo conjunto *bien orde-*

---

ducir, otra cosa que la enumerabilidad *mediante* números de la primera clase (conjuntos finitos) o *mediante* números de la segunda clase (conjuntos de la primera potencia). [*N. del a.*]

nado cuya correspondiente enumeración suministra la definición del producto $\beta\,\alpha$, donde β es el multiplicador y α es el multiplicando;[9] también aquí resulta que $\beta\,\alpha$ es en general diferente a $\alpha\,\beta$, de forma que también para la multiplicación de números la propiedad conmutativa es en general inválida. Por el contrario, encontramos que la ley asociativa de la multiplicación se mantiene siempre reinante, así que se tiene: $\alpha\,(\beta\,\gamma) = (\alpha\,\beta)\,\gamma$.

Algunos de los nuevos números se distinguen de los demás en que tienen la propiedad de ser números primos, si bien esta propiedad debe ser caracterizada aquí de una manera algo más precisa. Entenderemos por número primo un número α para el cual la factorización $\alpha = \beta\,\gamma$, donde β es el multiplicador, sólo es posible cuando $\beta = 1$ o $\beta = \alpha$; sin embargo, incluso para números primos α el multiplicando tiene en general un cierto margen de indeterminación, que dada la naturaleza de las cosas no puede ser alterado. Sin embargo, se mostrará en una futura publicación que la factorización de un número en sus factores primos siempre se puede conseguir en una forma esencialmente única, e incluso una forma determinada respecto al orden de los factores (en tanto éstos no sean números primos finitos que aparecen yuxtapuestos en el producto). Entretanto, surgen dos tipos de números primos infinitos y determinados, de los cuales el primero está más cercano a los números primos finitos, mientras que los números primos del segundo tipo tienen un carácter enteramente diferente.

Además, con la ayuda de estos nuevos conocimientos, me será posible ofrecer próximamente una fundamentación rigurosa de la proposición sobre los llamados conjuntos infinitos lineales indicada al final del artículo «Una contribución a la teoría de variedades» (Borchardts *J[ournal für die reine und angew. Mathematik*], vol. 84, p. 257).[10]

En la última entrega de este trabajo (vol. XXI, p. 54) demostré un teorema sobre conjuntos de puntos P contenidos en un dominio continuo *n*-dimensional, que aplicando la nueva terminología, recién definida, puede ser expresado como sigue: «Si P es un conjunto de puntos cuyo derivado $P^{(\alpha)}$ desaparece idénticamente [$= \varnothing$, JF], donde α es cualquier número arbitrario de la *primera* o de la *segunda* clase numérica, entonces el pri-

mer derivado $P^{(1)}$, y por consiguiente también el mismo P, es un conjunto de puntos de la potencia de la *primera* clase».[11] Me parece muy notable que esta proposición admite ser invertida como sigue: «Si P es un conjunto de puntos cuyo primer derivado $P^{(1)}$ tiene la potencia de la *primera* clase, entonces existe un número α perteneciente a la *primera* o a la *segunda* clase numérica, para el cual $P^{(\alpha)}$ desaparece idénticamente [= $\emptyset$, JF], y de todos los números α para los que esto ocurre hay uno que es el más pequeño».

La demostración de esta proposición se publicará próximamente, a consecuencia de una amigable invitación de mi estimado amigo, el señor Prof. Mittag-Leffler de Estocolmo, en el primer volumen de la nueva revista matemática que va a editar.[12] En conexión con ello, el señor Mittag-Leffler publicará un artículo en el que mostrará cómo, sobre la base de este teorema, se puede lograr una importante generalización de las investigaciones realizadas por él y por el señor Prof. Weierstrass sobre la existencia de funciones analíticas univaluadas con singularidades prescritas.

§ 4.

La serie de números extendida puede, si así lo requieren los fines perseguidos, ser completada sin más en un conjunto continuo de números añadiendo a cada número entero α todos los números reales x mayores que cero y menores que uno.

Quizá en este punto pueda plantearse la cuestión de sí, puesto que de esta manera hemos logrado una extensión determinada del dominio de los números reales hacia lo infinitamente grande, no se podrá definir con idéntico éxito números determinados infinitamente pequeños, o, lo que viene a ser lo mismo, números definidos finitos que no coincidan ni con los números racionales ni con los irracionales (que aparecen como valores límite de secuencias de números racionales), sino que estuvieran insertados en supuestos huecos entre los números reales, igual que los números irracionales se insertan en la cadena de los números racionales o los números trascendentes en la estructura de los números algebraicos.

La cuestión de la producción de tales interpolaciones, en la cual algunos autores han gastado mucho esfuerzo, sólo puede ser contestada clara y distintamente, en mi opinión y como se mostrará, con la ayuda de nuestros nuevos números, y en particular sobre la base del concepto general de enumeración de conjuntos bien ordenados. Los intentos previos, según creo, se apoyan en parte en una confusión del infinito impropio con el infinito propio, y en parte han sido construidos sobre un fundamento completamente inseguro e inestable.

El infinito impropio ha sido denominado a menudo por filósofos recientes un «mal» infinito, en mi opinión injustamente, puesto que ha probado ser un instrumento muy bueno y extremadamente útil en matemáticas y en ciencias naturales. Por lo que yo sé, las cantidades infinitamente pequeñas sólo han sido desarrolladas hasta ahora con utilidad en la forma del infinito impropio, y como tales son susceptibles de todas aquellas diferencias, modificaciones y relaciones que se encuentran en el análisis infinitesimal y en la teoría de funciones, y que se emplean para establecer la rica profusión de verdades analíticas. Pero todos los intentos de transformar por la fuerza lo infinitamente pequeño en un infinito propio deben finalmente ser abandonados por inútiles.[13] Si existen en absoluto las cantidades infinitamente pequeñas en sentido propio, esto es, si son definibles, entonces ciertamente no mantienen ninguna relación inmediata con las familiares cantidades que *devienen* infinitamente pequeñas.

En contraste con las mencionadas tentativas respecto a lo infinitamente pequeño, y con la confusión entre las dos formas de aparición del infinito, existe una opinión frecuentemente adoptada sobre la esencia y el significado de las cantidades numéricas, de acuerdo con la cual los únicos números concebidos como reales son los verdaderos números enteros finitos de nuestra clase numérica (I).

A lo sumo se concede una cierta realidad a los números racionales, que emergen directamente de aquéllos. Mas, en lo tocante a los irracionales, se les debería asignar en matemática pura un significado puramente formal, y sólo servirían como una especie de marcas de cálculo para fijar propiedades de grupos de números enteros y para describirlas de una forma simple

y uniforme. Según esta opinión, el verdadero material del análisis estaría formado exclusivamente por los verdaderos números finitos, y todas aquellas verdades que se han encontrado en aritmética y análisis, o cuyo descubrimiento esta aún pendiente, deberían concebirse como relaciones de los números enteros finitos entre sí. El análisis infinitesimal, y con él la teoría de funciones, mantienen su legitimidad sólo en tanto sus proposiciones puedan demostrablemente ser interpretadas como leyes que rigen entre los números enteros finitos. Esta concepción de la matemática pura, si bien no puedo estar de acuerdo con ella, tiene incontestablemente ciertas ventajas que me gustaría destacar aquí. Más aún, habla en favor de su significación la circunstancia de que una parte de los matemáticos más meritorios de la actualidad se cuentan entre sus defensores.

Si, como aquí se ha asumido, sólo los números enteros finitos son reales, mientras que los otros no son sino formas de relación, entonces se puede requerir que las demostraciones de las proposiciones analíticas sean revisadas de acuerdo con su «contenido aritmético», y que se rellenen todos los huecos que puedan revelarse en ellas de acuerdo con los principios de la aritmética; en la posibilidad de completarlas de tal modo se verá la verdadera piedra de toque para la autenticidad y el completo rigor de las demostraciones. No negaremos que de esta manera podemos perfeccionar la justificación de muchos teoremas y también practicar algunas mejoras metodológicas en varias partes del análisis; en la observancia de los principios que se siguen de esa intuición vemos también una salvaguarda contra todo tipo de absurdos o errores.[14]

De esta manera se recomienda a todos como pauta un principio definido, si bien un tanto prosaico y obvio, que se supone indica los verdaderos límites al vuelo de las ansias de especulación y conceptuación matemática, y muestra el dominio dentro del cual no correrán el peligro de caer en el abismo de lo «trascendente», donde, se dice para mayor miedo y terror sagrado, «todo es posible». Pero, dejando esto aparte, quién sabe si no sería una simple actitud de conveniencia lo que decidió a los creadores de esta doctrina a recomendarla a las fuerzas de altos vuelos, tan dadas a caer en el peligro de la arrogancia y la desmesura, como un eficaz regulador, una protección contra todos

los errores, por más que no se pueda encontrar en ella un principio fructífero. Pues la suposición de que estos matemáticos partieran de dichos principios al descubrir nuevas verdades queda excluida para mí, pues si bien concedo que estas máximas tienen muchos aspectos buenos, las tengo estrictamente hablando por erróneas. No les debemos ningún verdadero avance, y si se hubiera procedido realmente según ellas, entonces la ciencia se habría refrenado o habría quedado retenida en los más estrechos confines. Afortunadamente, en realidad las cosas no son tan graves, y estas reglas, útiles bajo ciertos supuestos y circunstancias, nunca han sido valoradas ni seguidas de forma enteramente literal; asombra también que hasta ahora, por lo que yo sé, no haya habido nadie que intentara formularlas más completamente y mejor de lo que yo he intentado hacer aquí.

Si nos volvemos a la historia, encontramos que se han mantenido más a menudo opiniones similares, y que ya se encuentran en Aristóteles. Como es bien sabido, a lo largo de la Edad Media la proposición «infinitum actu non datur»,* tomada de Aristóteles, fue tenida por incontrovertible por todos los escolásticos. Pero si se consideran las razones que Aristóteles[2] aduce contra la existencia real del infinito (véase p. ej. su *Metafísica*, Libro XI, cap. 10), se encontrará que pueden retrotraerse principalmente a una presuposición que envuelve una *petitio principii*, a saber, la presuposición de que sólo existen números finitos, lo cual dedujo de que sólo conocía enumeraciones [Zählungen] de conjuntos finitos. Creo haber probado más arriba, y aparecerá aún más claramente en lo que sigue, que se pueden efectuar enumeraciones determinadas tanto para conjuntos infinitos como para los finitos, supuesto que se dé a los conjuntos una determinada ley que los convierta en conjuntos *bien ordenados*. Que sin tal sucesión regular de sus elementos un conjunto no puede ser enumerado, eso está en la naturaleza del concepto de *contar* [Zählung]. También los conjuntos finitos pueden ser contados sólo si tenemos una sucesión determinada de los elementos enumerados; pero aquí encontramos una particular propiedad de los conjuntos finitos, a saber, que el resultado del contar —la *enumeración*— es independiente de la or-

* «No existe un infinito en acto.». [*N. del ed.*]

denación particular; mientras que para conjuntos infinitos, como hemos visto, tal independencia en general no se mantiene. Por el contrario, la enumeración de un conjunto infinito es un entero infinito que está *codeterminado* por la ley según la que se cuenta; es precisamente aquí, y sólo aquí, donde se localiza la diferencia esencial entre lo finito y lo infinito, fundada en la naturaleza misma y que por tanto nunca será abolida. Nunca más será negada la existencia del infinito a causa de esta diferencia, mientras que se mantiene la existencia de lo finito. Si se renuncia a uno, entonces se debe suprimir también el otro; y ¿adónde nos llevaría ese camino?

Otro argumento usado por Aristóteles contra la realidad del infinito consiste en la afirmación de que si el infinito existiera, entonces absorbería lo finito y lo destruiría, pues el número finito sería supuestamente aniquilado por un número infinito. Pero, como veremos claramente en lo que sigue, la cuestión es en verdad así: a un número infinito, si es pensado como determinado y completo, se le puede *muy bien* añadir un número finito y unirlo a él sin efectuar de ese modo la cancelación de este último (antes bien, el número infinito es modificado por tal adición de un número finito). Es sólo el procedimiento inverso, la adición de un número infinito a uno finito, cuando este último está situado en primer lugar, el que efectúa la cancelación del último sin que el primero sufra modificación. Este verdadero estado de cosas concernientes a lo finito y lo infinito, enteramente desconocido para Aristóteles, debería dar nuevos estímulos no sólo al análisis sino también a otras ciencias, particularmente las ciencias naturales.

Es en el transcurso de muchos años de esfuerzos e investigaciones científicas que me he visto impulsado lógicamente, casi contra mi voluntad (pues se opone a tradiciones que habían llegado a ser muy apreciadas por mí), al punto de vista de considerar lo infinitamente grande no sólo en la forma de algo que crece sin límites (y en la forma estrechamente relacionada de las series infinitas convergentes, introducidas por primera vez en el siglo XVII), sino también fijarlo matemáticamente por medio de números en la forma determinada de lo completamente infinito; y por ello no creo que se puedan hacer valer en contra razones que yo no estuviera en condiciones de afrontar.

§ 5.

Al hablar antes de tradiciones, no las entendía solamente en el sentido estrecho de lo vivido, sino que las remontaba a los fundadores de la filosofía y las ciencias naturales modernas. Con vistas a un juicio acerca de la cuestión que aquí se trata, doy sólo algunas de las referencias más importantes. Se debería tener en cuenta:

> Locke, *Ensayo sobre el entendimiento humano*, lib. II, cap. XVI y XVII.
> Descartes, Cartas y discusiones sobre sus *Meditaciones metafísicas*; también *Principia Philosophiae*, I, 26.
> Spinoza, Carta XXIX, *Cogitata Metaphysica* partes I y II.
> Leibniz, [*Obras*] edición de Erdmann, pp. 138, 244, 436, 744. Edición de Pertz, II, 1 p. 209; III, 4 p. 218; III, 5 pp. 307, 322, 389; III, 7 p. 273.*

Incluso hoy, uno no puede encontrar argumentos más fuertes que éstos contra la introducción de números infinitos; examínense pues independientemente estos argumentos y compárense con los míos. Reservaré para otra ocasión una detallada y completa discusión de estos pasajes, y en particular de la extremadamente importante y rica en contenido carta de Spinoza a L. Meyer, pero aquí me limitaré a lo que sigue.[15]

Por diferentes que puedan ser las teorías de estos escritores, en su juicio sobre lo finito y lo infinito dichos pasajes están esencialmente de acuerdo en que la finitud es parte del concepto de número, y que por otro lado el verdadero Infinito o Absoluto, que está en Dios, no admite determinación de ningún tipo. En lo tocante al último punto, estoy completamente de acuerdo con él, y no podría ser de otra manera, pues la proposición «omnis determinatio est negatio»)** es para mí enteramente incuestionable. Pero, como ya he dicho antes en la discusión de

* También es destacable: Hobbes, *De corpore* cap. VII, 11. Berkeley, *Tratado sobre los principios del conocimiento humano*, §§ 128-131. [*N. del a.*]

** «Toda determinación es negación.» [*N. del ed.*]

los argumentos aristotélicos contra el «infinitum actu», veo en el primer punto una *petitio principii*, y esto explica algunas contradicciones que se encuentran en todos estos autores, y especialmente en Spinoza y Leibniz. No puedo encontrar ninguna justificación para la asunción de que junto a lo absoluto —que no es accesible por medio de ninguna determinación— y lo finito, no pueda haber modificaciones que, aun no siendo finitas, sean determinables por medio de números y por tanto sean lo que yo llamo infinito propio. En efecto, en mi opinión esta asunción es incluso contradictoria con ciertas afirmaciones propuestas por los dos últimos filósofos.

Lo que yo afirmo y creo haber probado en este trabajo, así como en mis escritos anteriores, es que tras lo finito hay un *transfinito* (que se podría llamar también *suprafinito*), esto es, una jerarquía ilimitada de modos determinados que según su naturaleza no son finitos sino infinitos, pero que, igual que lo finito, pueden ser determinados por números bien definidos y distinguibles entre sí. Estoy convencido pues de que el dominio de las cantidades definibles no se agota en las cantidades finitas, y que los límites de nuestro conocer pueden por consiguiente ser extendidos, sin que con ello se ejerza ninguna violencia a nuestra naturaleza. Por lo tanto, en lugar de la proposición aristotélico-escolástica discutida en el § 4, propongo esta otra:

Omnia seu finita seu infinita *definita* sunt et excepto Deo ab intellectu determinari possunt.[3]*

A menudo se aduce la finitud del entendimiento humano como la razón por la cual sólo pueden ser pensados números finitos; pero de nuevo veo en esta aserción el círculo vicioso antes mencionado. A saber, se entiende tácitamente por «finitud del entendimiento» que su capacidad para la formación de números está limitada a los números finitos. Pero si se mostrara que el entendimiento puede también en cierto sentido distinguir y definir los números infinitos, esto es, *suprafinitos*, entonces o bien se debe dar un significado ampliado a las palabras «entendimiento finito», del cual no se pueda ya extraer aquella conclusión; o bien el predicado «infinito» debe concedérsele al

* «Todas las cosas, ya finitas ya infinitas, son *definidas* y, exceptuando a Dios, pueden ser determinadas por el intelecto.» [*N. del ed.*]

entendimiento humano en ciertos respectos, que es en mi opinión el único procedimiento correcto. Las palabras «entendimiento finito», que se oyen tan a menudo, en mi opinión no son de ningún modo correctas; con todo lo limitada que en verdad es la naturaleza humana, aún hay mucho de infinito en ella, e incluso afirmo que si no fuese ella misma en muchos respectos infinita, la sólida confianza y certeza en el ser de lo Absoluto, sobre lo cual sabemos que estamos todos de acuerdo, sería inexplicable. En particular, sostengo que el entendimiento humano tiene una ilimitada capacidad para la formación progresiva de clases numéricas que guardan una determinada relación con los modos infinitos y cuyas *potencias* son de intensidad creciente.

Las principales dificultades en los sistemas de los dos últimos pensadores mencionados, que en lo externo son diferentes, pero en lo interno están estrechamente relacionados, pueden según creo aproximarse a una solución siguiendo el camino que yo he trazado; de hecho, algunas de las dificultades pueden ser ya satisfactoriamente resueltas y explicadas. Aquellas dificultades son las que han dado lugar al criticismo posterior, que con todas sus ventajas no ha producido, según creo, un adecuado sustituto al desarrollo frustrado de las doctrinas de Spinoza y Leibniz.[16] Pues junto a, o en lugar de, la explicación mecánica de la naturaleza, que en su propia esfera cuenta con todos los medios y ventajas del análisis matemático, pero cuya unilateralidad e insuficiencia han sido tan acertadamente expuestas por Kant, no ha habido hasta ahora ni siquiera el inicio de una explicación *orgánica* de la naturaleza que intentara ir más allá y estuviera equipada con el mismo rigor matemático. Según creo, sólo se le podrá abrir camino retomando y continuando los trabajos y esfuerzos de aquellos pensadores.

Un punto especialmente difícil en el sistema de Spinoza es la relación de los modos finitos con los modos infinitos; permanece inexplicado cómo y bajo qué circunstancias puede mantener su independencia lo finito con respecto a lo infinito, o lo infinito con respecto a un infinito todavía más potente. El ejemplo ya mencionado en el § 4 parece indicar en su sencillo simbolismo la manera en la cual tal vez podamos aproximarnos a la solución de esta cuestión. Si ω es el primer número de la segunda clase numérica, entonces $1 + \omega = \omega$, pero $\omega + 1 = (\omega+1)$,

donde $(\omega+1)$ es un número enteramente distinto de ω. Por lo tanto, como se ve aquí claramente, todo depende de la *posición* de lo finito respecto a lo infinito; si el primero va por delante, entonces se integra en lo infinito y desaparece en él; pero si se *resigna* a tomar su lugar *tras* lo infinito, es preservado y se une con él formando un infinito nuevo, ya que modificado.

§ 6.

Si hubiera de ofrecer dificultades la concepción de números enteros *infinitamente grandes, completos*, comparables entre sí y con los números finitos, y ligados entre sí y a los números finitos por medio de leyes fijas, entonces estas dificultades se relacionarán con la observación de que, aunque los nuevos números tienen en muchos aspectos el mismo carácter que los anteriores, en muchos otros aspectos tienen empero una naturaleza absolutamente singular; de hecho, ocurre a menudo que en uno y el mismo número infinito se hallan unidas diferentes características, aunque nunca se encuentran juntas en los números finitos. En uno de los pasajes citados en la sección precedente se arguye así que un número entero infinito, si existiese, tendría que ser tanto un número par como impar, y puesto que estas dos características no pueden darse juntas, se sigue tales números no existen.

Se asume aquí obviamente el supuesto tácito de que las características que son mutuamente excluyentes para los números tradicionales deberían mantener también esta relación para los nuevos números, de donde se sigue la imposibilidad de los números infinitos. ¿No salta a la vista el paralogismo? ¿No está unida toda generalización o extensión de un concepto al abandono de particularidades, e incluso es impensable sin él? ¿No se ha tenido recientemente la idea de introducir los números complejos,[17] un pensamiento de la mayor importancia para el desarrollo del análisis y que ha llevado a los más grandes progresos, sin ver ningún obstáculo en el hecho de que no pueden ser considerados positivos ni negativos? Y es sólo un paso similar el que aquí aventuro; incluso será tal vez mucho más fácil para la conciencia general seguirme a mí de lo que lo fue posi-

ble al pasar de los números reales a los complejos; puesto que los nuevos números enteros, aunque se distinguen de los tradicionales por una determinación sustancial y más intensa, en cuanto enumeraciones tienen en común con ellos una realidad del mismo tipo; mientras que la introducción de cantidades complejas se enfrentó a dificultades durante mucho tiempo hasta que, tras muchos trabajos, se hubo encontrado su representación geométrica por medio de puntos o segmentos en un plano.

Para volver brevemente a aquella consideración sobre lo par y lo impar, consideremos de nuevo el número ω para mostrar cómo esas características, que en los números finitos son incompatibles, se encuentran aquí juntas sin contradicción alguna. En el § 3 se dieron las definiciones generales de la adición y la multiplicación, y he resaltado que en estas operaciones la ley conmutativa no tiene en general ninguna validez; en esto veo yo una diferencia esencial entre los números infinitos y los finitos. Téngase en cuenta también que en un producto $\beta \cdot \alpha$ entiendo por multiplicador β, y por multiplicando α. Inmediatamente surgen para ω las dos siguientes expresiones: $\omega = \omega \cdot 2$ y $\omega = 1+\omega \cdot 2$. De acuerdo con ellas, ω puede ser considerado tanto un número par como un impar. Pero desde otro punto de vista, a saber, cuando 2 se toma como multiplicador, se podría decir también que ω no es un número par ni impar; puesto que, como se puede probar fácilmente, ω no se puede representar ni en la forma $2 \cdot \alpha$ ni en la forma $2 \cdot \alpha + 1$. Por consiguiente, el número ω tiene en efecto, en comparación con los números tradicionales, una naturaleza completamente peculiar, ya que todas esas características y propiedades se encuentran unidas en él. Y aún más peculiares son los restantes números de la segunda clase numérica, como mostraré más adelante.

§ 7.

En el § 5 cité muchos pasajes de las obras de Leibniz donde habla contra los números infinitos. Mientras que aquí afirma entre otras cosas: «No hay ningún número infinito, ni línea u otra cantidad infinita, si se les toma por verdaderos Todos». «El verdadero infinito no es una modificación, es lo absoluto; por el

contrario, en cuanto se modifica se está limitando o formando un finito» (donde, en el segundo pasaje, concuerdo con la primera de las afirmaciones, pero no con la segunda), estoy sin embargo en la afortunada situación de poder presentar citas del mismo pensador en las cuales, contradiciéndose en cierto modo a sí mismo, se declara inequívocamente a favor del infinito propio (diferente de lo Absoluto). Así, en la p. 118 de la edición Erdmann dice:

«Estoy en tal medida a favor del infinito actual, que en lugar de admitir que la naturaleza lo aborrece, como se dice vulgarmente, sostengo que la afecta por todas partes para mejor mostrar las perfecciones de su Autor. Así, creo, no hay ninguna parte de la materia que no sea, no digo ya divisible, sino actualmente dividida; y en consecuencia, la menor partícula debe considerarse como un mundo lleno de una infinidad de criaturas diferentes.»*[18]

Pero el más firme defensor del infinito propio, como se nos presenta por ejemplo en los conjuntos de puntos bien definidos o en la construcción de cuerpos a partir de átomos puntuales, (no aludo pues aquí a los átomos químico-físicos, democríteos, porque no los puedo tener por existentes ni conceptualmente ni en la realidad, aunque con esta ficción se hayan alcanzado hasta cierto límite muchas cosas útiles), se encuentra en un filósofo y matemático de nuestro siglo sumamente perspicaz, en Bernhard Bolzano, que ha desarrollado particularmente sus puntos de vista al respecto en el hermoso y sustancioso tratado *Paradojas del infinito* (Leipzig 1851), cuyo objetivo es demostrar que las contradicciones que los escépticos y perpatéticos *de todos los tiempos* han buscado en el infinito no se dan en absoluto, tan pronto como nos tomamos el trabajo (ciertamente no muy ligero) de aceptar los conceptos de infinito con toda seriedad y según su auténtico contenido. En ese tratado se encuentra una discusión correcta en muchos aspectos sobre el infinito impropio matemático, tal y como aparece en la forma de diferenciales de primer orden o de orden superior, o en la sumación de series infinitas, u otros procesos de paso al límite. Este infinito (llamado por algunos escolásticos infinito sincategoremáti-

* Las tres citas de Leibniz aparecen en francés en el original. [*N. del ed.*]

co) es un mero concepto auxiliar,[19] un concepto de relación de nuestro pensamiento, en cuya definición está comprendida la variabilidad, y del que por tanto el «datur» nunca puede ser afirmado en sentido propio.

Es muy notable que, respecto a esta clase de infinito, no reina ninguna diferencia esencial de opinión aún entre los filósofos del presente, si puedo prescindir del hecho de que ciertas escuelas modernas de así llamados positivistas o realistas[4] o materialistas creen ver en este infinito *sincategoremático*, del que ellos mismos tienen que admitir que no tiene verdadero ser, el *más elevado de los conceptos*.

Sin embargo, ya en Leibniz encontramos indicada en muchos lugares la situación esencialmente correcta; por ejemplo, el siguiente pasaje de la edición de Erdmann (p. 436) alude al infinito impropio:

«Filosóficamente hablando, yo no establezco magnitudes infinitamente pequeñas en mayor grado que [magnitudes] infinitamente grandes, ni en mayor grado infinitésimos que infinituplos. En efecto, a ambas las tengo, por hablar de una manera concisa, por ficciones de la mente, aptas para el cálculo, como lo son las raíces imaginarias en álgebra. He mostrado, por lo demás, que estas expresiones tienen una gran utilidad para la economía de pensamiento, y aún más para el descubrimiento; y no pueden conducir a error, pues basta con sustituir lo infinitamente pequeño por [una cantidad] tan pequeña como se quiera para que el error sea menor que [una cantidad] dada, de donde se sigue que no puede darse error.»*

Bolzano es quizá el único para el que los números propiamente infinitos adquieren una cierta legitimidad, o al menos trata mucho de ellos; mas precisamente no estoy de acuerdo en absoluto con la forma en que él los maneja, sin poder establecer una correcta definición de ellos, y considero por ejemplo los §§ 29-33 de su libro como infundados y erróneos.[20] Le faltan al autor, para una verdadera captación conceptual de los números propiamente infinitos, tanto el concepto general de *potencia* como el concepto preciso de *enumeración*. Es verdad que en su escrito ambos aparecen en germen en pasajes aislados, bajo la

* En latín en el original. [*N. del ed.*]

forma de casos especiales, pero sin embargo no los desarrolla, según me parece, con completa claridad y precisión, lo que explica muchas inconsistencias e incluso algunos errores de esta valiosa obra.

Estoy convencido de que sin los dos conceptos citados no se puede avanzar en la teoría de conjuntos, y lo mismo es válido, según creo, para los campos que caen bajo la teoría de conjuntos o tienen con ella el más íntimo contacto, como por ejemplo la moderna teoría de funciones, por una parte, y la lógica y la teoría del conocimiento por otra. Cuando considero el infinito tal como se hace aquí y en mis anteriores investigaciones, encuentro un verdadero placer, al que me entrego lleno de agradecimiento, viendo cómo el concepto de número entero, que en lo finito tiene sólo el trasfondo de la *enumeración*, al ascender a lo infinito se *desdobla* en cierto modo en dos conceptos, el de *potencia*, que es independiente de la ordenación que se dé al conjunto, y el de *enumeración*, que está necesariamente ligado a una ordenación reglada del conjunto, en virtud de la cual se convierte en un *conjunto bien ordenado*. Y cuando desciendo de nuevo de lo infinito a lo finito, veo con igual claridad y belleza cómo ambos conceptos de nuevo se hacen uno y *confluyen* en el concepto de número entero finito.

§ 8.

Podemos hablar de la realidad o existencia de los números enteros, tanto finitos como infinitos, en dos sentidos; aunque en rigor son las dos mismas relaciones en que puede ser considerada en general la realidad de cualquier concepto o idea. En primer lugar, podemos considerar los números enteros como existentes en tanto que, al ocupar un lugar completamente determinado en nuestro entendimiento, en virtud de las definiciones, quedan perfectamente diferenciados de todos los demás elementos de nuestro pensamiento, guardan con ellos relaciones determinadas y pueden por consiguiente modificar la sustancia de nuestra mente de una forma determinada; permítaseme llamar a esta clase de realidad de nuestros números su *realidad intrasubjetiva* o *inmanente*.[5] Pero además, se puede atribuir también

realidad a los números en tanto que deben ser tenidos por expresión o representación de eventos y relaciones del mundo exterior que se contrapone al intelecto, en tanto que además las diferentes clases numéricas (I), (II), (III), etc. son representantes de potencias, que ocurren actualmente en la naturaleza corpórea o mental. A esta segunda clase de realidad la llamo *realidad transubjetiva* o también *transiente* de los números enteros.

Dado el fundamento absolutamente realista, pero a la vez no menos idealista, de mis consideraciones, no me cabe duda alguna de que estas dos clases de realidad siempre se dan juntas,[21] en el sentido de que un concepto calificado como existente respecto a la primera posee también en ciertos respectos, e incluso en infinitos respectos, una realidad transiente,[6] cuyo descubrimiento está con frecuencia entre las tareas más laboriosas y difíciles de la metafísica, y debe a menudo dejarse para un tiempo posterior, cuando el desarrollo natural de una de las demás ciencias desvele el significado transiente del concepto en cuestión.

Esta conexión entre ambas realidades tiene su verdadero fundamento en la *unidad del todo, al cual nosotros mismos pertenecemos*. El hacer referencia a esta conexión, es con la intención de derivar de ella una consecuencia que en mi opinión es de gran importancia para la matemática; a saber, que para el desarrollo de su material de ideas esta última tiene que considerar *única* y *exclusivamente* la realidad *inmanente* de sus conceptos, y no tiene por tanto *ninguna* obligación de comprobar su realidad *transiente*.[22] Debido a esta posición destacada, que la distingue de todas las demás ciencias y proporciona una explicación del carácter relativamente fácil y desenvuelto que el ocuparse de ella tiene, merece especialmente el nombre de *matemática libre*, una denominación a la que, si fuese mía la elección, daría preferencia sobre la de matemática «pura», que ha llegado a ser usual.

La matemática es enteramente libre en su desarrollo, y sólo está limitada por la consideración autoevidente de que sus conceptos sean consistentes en sí mismos, así como que estén en relaciones fijas, determinadas por definiciones, con los conceptos construidos antes, ya presentes y acreditados.[7] En particular, para la introducción de nuevos números sólo está obligada a

dar definiciones de ellos mediante las cuales se les conferirá tal determinación y, bajo ciertas circunstancias, tales relaciones con los antiguos números, que puedan ser distinguidos unos de otros con precisión en cada caso. En cuanto un número satisface todas estas condiciones, puede y debe ser considerado en matemáticas como existente y real. En esto veo yo la razón, indicada en el § 4, por la cual los números racionales, los irracionales y los complejos deben ser considerados como absolutamente existentes, tanto como los números enteros positivos finitos.

No es necesario, creo yo, temer que estos principios representen peligro alguno para la ciencia, como les ocurre a muchos; por una parte, las condiciones señaladas, únicas bajo las cuales puede practicarse la libertad de formar números, son tales que dejan un margen extremadamente pequeño a la arbitrariedad. Además, todo concepto matemático lleva en sí mismo el correctivo necesario; si resulta estéril o inconveniente, se comprobará muy pronto debido a su inutilidad y será entonces abandonado, por falta de éxito. Mas, por el contrario, me parece que toda limitación superflua del impulso de investigación matemática lleva consigo un peligro mucho mayor, tanto mayor porque no es posible extraer de la esencia de la ciencia ninguna justificación real para ello; puesto que la *esencia* de la *matemática* radica precisamente en su *libertad.*

Aun si no hubiese llegado a captar esta condición característica de la matemática partiendo de las razones mencionadas, todo el desarrollo de la ciencia misma, tal como lo observamos en nuestro siglo, me hubiera llevado exactamente a las mismas opiniones.

Si Gauss, Cauchy, Abel, Jacobi, Dirichlet, Weierstrass, Hermite y Riemann hubiesen estado obligados a someter continuamente sus nuevas ideas a un control metafísico, ciertamente no disfrutaríamos de la grandiosa estructura de la moderna teoría de funciones; la cual, a pesar de haber sido proyectada y lograda en completa libertad y sin ulteriores propósitos, sin embargo manifiesta ya su significado transiente en su aplicación a la mecánica, la astronomía y la física matemática, tal y como era de esperar. No habríamos visto el gran auge de la teoría de ecuaciones diferenciales originado por Fuchs, Poincaré y mu-

chos otros, si estas excelentes energías hubiesen sido refrenadas y encorsetadas por influencias extrañas. Y si Kummer no se hubiera tomado la fructífera libertad de introducir los llamados números «ideales» en la teoría de números, no estaríamos hoy en situación de admirar los trabajos algebraicos y aritméticos de Kronecker y Dedekind, tan importantes y excelsos.[23]

La matemática está pues legitimada para moverse completamente libre de trabas metafísicas, mas por otra parte no puedo conceder el mismo derecho a la matemática «aplicada», como por ejemplo la mecánica analítica y la física matemática. En mi opinión, estas disciplinas son metafísicas tanto en sus fundamentos como en sus objetivos; si tratan de librarse de ello, como ha propuesto recientemente un renombrado físico, degenerarán en una «descripción de la naturaleza»,[24] que ha de carecer tanto del fresco aliento del pensamiento matemático libre como del poder de *explicación* y *profundización en los fundamentos* [Ergründung] de los fenómenos naturales.

§ 9.

Dada la gran importancia que adquieren en la teoría de conjuntos los llamados números reales, racionales e irracionales, no quiero dejar de decir aquí lo más importante sobre sus definiciones. No trataré más de cerca la introducción de los números racionales, ya que se han elaborado múltiples presentaciones aritméticas rigurosas de esta cuestión; entre las que me resultan más próximas destacaría las de H. Grassmann (*Lehrbuch der Arithmetik*, Berlín 1861) y J. H. T. Müller (*Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik*, Halle 1855). En cambio, quiero discutir con brevedad pero en cierto detalle las tres principales formas de presentación aritmética rigurosa de los números reales en general que me son conocidas, que probablemente son también en lo esencial las tres únicas. Se trata *primero* del modo de introducción del que se ha valido durante muchos años el señor Prof. Weierstrass en sus lecciones sobre funciones analíticas y del cual se pueden encontrar algunas indicaciones en el «programa» del señor E. Kossak (*Die Elemente der Arithmetik*, Berlín 1872).[25] En *segundo* lugar, el señor R. Dedekind ha publi-

cado una forma singular de definición en su escrito: *Continuidad y números irracionales* (Braunschweig 1872), y en *tercer* lugar, yo indiqué en el año 1871 (*Math. Annalen*, tomo V, p. 123) una forma de definición que guarda superficialmente cierto parecido con la de Weierstrass, de forma que el señor H. Weber pudo confundirla con ella (*Zeitschrift für Mathematik und Physik*, año 27, Sección histórico-literaria, p. 163). Pero en mi opinión esta *tercera* forma de definición, desarrollada también más tarde por el señor Lipschitz (*Grundlagen der Analysis*, Bonn 1877), es la más simple y natural de todas, y encontramos en ella la ventaja de que se adapta de forma más inmediata al cálculo analítico.

La definición de un número real irracional presupone siempre un conjunto bien definido de números racionales, infinito y de la primera potencia; en esto consiste lo común a todas estas formas de definición, radicando su diferencia en el momento productivo a través del cual el conjunto se vincula con el número definido gracias a él, y en las condiciones que el conjunto tiene que satisfacer para ser apropiado como fundamento de la definición en cuestión.

En la *primera* forma de definición se toma como base un conjunto de números racionales positivos a_ν que se designa como (a_ν) y que cumple la condición de que, si se suma cualquier cantidad finita de números a_ν, elegidos a voluntad, esta suma siempre permanece por debajo de un límite especificable. Si tenemos ahora dos de tales agregados (a_ν) y (a'_ν), se demuestra rigurosamente que se pueden presentar tres casos; o bien cada fracción $1/n$ de la unidad está comprendida en ambos agregados con idéntica frecuencia, al sumar sus elementos en una cantidad finita suficiente, que puede aumentar; o bien, a partir de un cierto n, $1/n$ está siempre contenido más veces en el primer agregado que en el segundo; o, en tercer lugar, a partir de un cierto n, $1/n$ está comprendido más veces en el segundo que en el primero. Correspondiendo a estas situaciones, si b y b' son los números definidos por los dos agregados (a_ν) y (a'_ν), estipularemos en el primer caso que $b = b'$; en el segundo, que $b > b'$ y en el tercero, que $b < b'$. Si se unen ambos agregados para formar uno nuevo (a_ν, a'_ν), éste aporta el fundamento para la definición de $b + b'$; pero si de los agregados (a_ν) y (a'_ν) se for-

ma el nuevo agregado $(a_\nu \cdot a'_\mu)$, en el que los elementos son los productos de cada a_ν por cada a'_μ, este nuevo agregado se tomará como fundamento para la definición del producto bb'.

Se observa que en este caso el momento productivo que vincula el conjunto con el número definido por él se halla en la formación de sumas; pero debe destacarse como *esencial* que sólo se emplea la suma de una cantidad siempre finita de elementos racionales, y que el número a definir b no se identifica de antemano con la suma Σa_ν de la serie infinita (a_ν); esto hubiera constituido un *error lógico*, porque, antes bien, la definición de la suma Σa_ν sólo se obtiene por equiparación con el número dado b, que necesariamente debe haberse definido con anterioridad. Creo que este error lógico, evitado por vez primera por el señor Weierstrass, fue cometido en el pasado de forma prácticamente general; y la razón de que no se haya percibido es que es de los raros casos en que un verdadero error no puede causar ningún perjuicio significativo en el cálculo. Pese a todo, es mi convicción que todas las dificultades que se han encontrado en el concepto de los irracionales están relacionadas con el mencionado error, mientras que, evitando este error, el número irracional se establece en nuestro espíritu con la misma precisión, distinción y claridad que el número racional.

La forma de definición del señor Dedekind toma por base la totalidad de los números racionales, pero divididos en dos grupos de tal manera que, si los números del primer grupo se denotan por A_ν y los del segundo grupo por B_ν, siempre es $A_\nu < B_\mu$; a una tal división del conjunto de los números racionales la llama el señor Dedekind una cortadura del mismo, la designa por $(A_\nu \mid B_\mu)$ y le hace corresponder un número b. Si se comparan ahora entre sí dos de tales cortaduras, $(A_\nu \mid B_\mu)$ y $(A'_\nu \mid B'_\mu)$, se encuentran *tres* posibilidades en total, al igual que en la *primera* forma de definición, correspondiendo a las cuales los dos números b y b' representados por ambas cortaduras se consideran iguales entre sí, o bien $b > b'$ o $b < b'$. El primer caso tiene lugar, prescindiendo de ciertas excepciones fácilmente regulables que suceden en caso de que los números a definir sean racionales, sólo cuando se da una completa identidad de ambas cortaduras, y en esto se advierte la decidida e innegable ventaja de esta forma de definición sobre las otras dos: que a cada número b le corres-

ponde sólo una única cortadura; pero a esta circunstancia se contrapone el gran inconveniente de que en el análisis los números *nunca* se presentan bajo la forma de «cortaduras», en la que sólo pueden ponerse con gran artificio y prolijidad.[26]

A continuación vienen, también en este caso, las definiciones de la suma $b + b'$ y del producto bb', sobre la base de nuevas cortaduras resultantes de las dos dadas.

El inconveniente que llevan consigo la *primera* y la *tercera* formas de definición —a saber, que se presentan con infinita frecuencia los mismos números, es decir, números idénticos, y que por tanto no se obtiene de forma inmediata una visión inequívoca de la totalidad de los números reales— puede ser superado con la mayor facilidad por especialización de los conjuntos (a_ν) que se toman por base, recurriendo a una de las conocidas construcciones sistemáticas unívocas, como el sistema decimal o el simple desarrollo en fracciones continuas.[27]

Llego ahora a la *tercera* forma de definición de los números reales. También aquí se toma como base un conjunto infinito de números racionales (a_ν) de la primera potencia, al que sin embargo se le exige una propiedad adicional, como en la forma de definición de Weierstrass. Yo pongo como requisito que, admitido un número racional arbitrariamente pequeño ε, pueda separarse una cantidad finita de miembros del conjunto, de tal modo que los restantes tomados de dos en dos presenten una diferencia que en valor absoluto es menor que ε. A todo conjunto semejante (a_ν), que puede ser también caracterizado por la exigencia de que

$$\lim_{\nu=\infty}(a_{\nu+\mu}-a_\nu) = 0 \text{ (para un } \mu \text{ arbitrario)},$$

lo llamo una *sucesión fundamental*, y le asigno un número b definido por ella, para el cual incluso se puede usar de forma conveniente el propio símbolo (a_ν), como ha propuesto el señor Heine, quien se ha adherido a mí en esta cuestión después de muchas aclaraciones verbales (compárese *J[ournal für die reine und angewandte Mathematik]* de Borchardt, vol. 74, p. 172). Una tal sucesión fundamental presenta tres casos, como puede ser rigurosamente deducido de su concepto; o bien sus elementos a_ν son, para un valor suficientemente grande de ν, menores

en valor absoluto que cualquier número dado arbitrariamente; o bien a partir de un cierto ν son mayores que un número racional positivo ρ que puede determinarse con precisión; o a partir de un cierto ν son menores que una cantidad negativa racional $-\rho$ que puede determinarse con precisión. En el primer caso digo que b es igual a cero, en el segundo, que b es mayor que cero o positivo; en el tercero, que b es menor que cero o negativo.

Vienen ahora las operaciones elementales. Si (a_ν) y (a'_ν) son dos *sucesiones fundamentales* que determinan los números b y b', se demuestra que también $(a_\nu \pm a'_\nu)$ y $(a_\nu \cdot a'_\nu)$ son sucesiones fundamentales, que determinan por tanto tres nuevos números que me sirven como definición de la suma y la diferencia $b \pm b'$ y del producto $b \cdot b'$.

Si además b es diferente de cero, lo cual ha sido definido anteriormente, se demuestra que también $\left(\frac{a'_\nu}{a_\nu}\right)$ es una sucesión fundamental, cuyo número correspondiente proporciona la definición del cociente.

Las operaciones elementales entre un número b dado mediante una sucesión fundamental (a_ν) y un número racional a dado directamente están comprendidas en lo que se acaba de estipular, haciendo $a'_\nu = a$ y $b' = a$.

Sólo ahora vienen las definiciones del ser igual que, mayor que y menor que para dos números b y b' (de los cuales b' puede ser también $= a$); a saber, se dice que $b = b'$ o $b > b'$ o bien $b < b'$ según que $b - b'$ sea igual a cero, o mayor o menor que cero.

Después de todos estos prolegómenos, se obtiene como primera proposición *rigurosamente demostrable* que, si b es el número determinado por la sucesión fundamental (a_ν), entonces, con ν creciente, $b - a_\nu$ se hace menor en valor absoluto que cualquier número racional concebible, o lo que es lo mismo, que:

$$\lim_{\nu=\infty} a_\nu = \mathrm{b}.$$

Préstese mucha atención a este punto cardinal, cuya importancia puede ser fácilmente pasada por alto: en la *tercera* forma de definición el número b no se define como el límite de los términos a_ν de una sucesión fundamental (a_ν); ya que esto sería un

error lógico semejante al destacado en la discusión de la *primera* forma de definición, es decir, porque estaríamos presuponiendo la existencia del límite $\lim_{\nu=\infty} a_\nu$; el procedimiento es más bien el contrario, de modo que el concepto de b ha sido establecido sobre los números racionales mediante nuestras definiciones precedentes con tales propiedades y relaciones, que de ellas puede extraerse con evidencia lógica la conclusión de que $\lim_{\nu=\infty} a_\nu$ existe y es igual a b. Ruego que se me disculpe la prolijidad en este punto, motivada por la observación de que la mayoría de las personas pasa por alto esta insignificante menudencia y por ello se enredan fácilmente en dudas y contradicciones respecto a los irracionales, de las que se hubieran visto completamente libres observando las circunstancias que hemos destacado aquí. Entonces comprenderían con claridad que el número irracional, en virtud de *las características que le confieren las definiciones*, tiene una realidad tan definida en nuestra mente como los números racionales, e incluso los racionales enteros, y que no necesitamos *obtenerlos* por un proceso de paso al límite; sino que más bien, al contrario, por su *posesión* nos convencemos de la posibilidad y la evidencia de los procesos de paso al límite en general;[8] pues la proposición que acabamos de citar se extiende ahora con facilidad a lo siguiente: Si (b_ν) es un conjunto de números racionales o irracionales cualesquiera con la característica de que $\lim_{\nu=\infty} (b_{\nu+\mu} - b_\nu) = 0$ (cualquiera que sea μ), entonces existe un número b determinado por una sucesión fundamental (a_ν), tal que:

$$\lim_{\nu=\infty} (b_\nu) = b$$

Se muestra por tanto que *los mismos* números b, definidos sobre la base de sucesiones fundamentales (a_ν) —a las que llamo sucesiones fundamentales de *primer* orden— de tal modo que resultan ser los límites de los a_ν, se pueden representar también de múltiples maneras como límites de sucesiones (b_ν), donde cada b_ν viene definido por medio de una sucesión fundamental de primer orden $(a_\mu^{(\nu)})$ (con ν fijo).

A un conjunto (b_ν) tal, si tiene la propiedad de que $\lim_{\nu=\infty} (b_{\nu+\mu} - b) = 0$ (para un μ cualquiera), lo llamo en consecuencia una sucesión fundamental de *segundo* orden.

Del mismo modo se forman sucesiones fundamentales de *tercer, cuarto,... n–ésimo* orden, pero también sucesiones fundamentales de α–ésimo orden, donde α es un número cualquiera de la segunda clase de números.

Todas estas sucesiones fundamentales tienen exactamente el mismo alcance, para la determinación de un número real b, que las sucesiones fundamentales de *primer* orden, y la diferencia radica sólo en la forma más amplia y complicada en que vienen dadas. Me parece sin embargo que, tan pronto como nos situemos en el punto de vista de la tercera forma de definición, resulta sumamente conveniente fijar esa diferencia de la manera indicada, como hice ya de manera similar en el lugar citado (*Math. Ann.*, tomo V, p. 123). Por ello me sirvo ahora de la siguiente forma de expresión: la cantidad numérica b viene dada por una sucesión fundamental de orden n–ésimo o α–ésimo, respectivamente. Si se decide aceptar esto, se obtiene con ello un lenguaje extraordinariamente flexible y comprensible para describir de la manera más simple y expresiva la riqueza del multiforme tejido del análisis, tan complicado a menudo, con lo que se consigue en mi opinión una ganancia en claridad y transparencia nada despreciable. Con esto me opongo a las reservas expresadas por el señor Dedekind respecto a estas distinciones en el prefacio de su escrito *Continuidad y números irracionales*; no estaba en mi ánimo, ni mucho menos, introducir mediante las sucesiones fundamentales de segundo, tercer orden, etc., nuevos números que no fueran ya determinables por medio de sucesiones fundamentales de primer orden, sino solamente tenía en mente la forma conceptualmente distinta de determinación; lo cual se sigue claramente de diversos pasajes aislados de mi propio trabajo.

Quisiera llamar aquí la atención sobre una notable circunstancia, a saber, que en estos órdenes de sucesiones fundamentales, distinguidos por mí mediante números de la primera y de la segunda clases numéricas, se agotan por completo todas las formas con el carácter usual de sucesiones que cabe pensar en el análisis, descubiertas ya o aún por descubrir, en el sentido de que no existen en absoluto sucesiones fundamentales cuyo número de orden se pueda designar con un número de digamos la tercera clase numérica, como demostraré rigurosamente en otra ocasión.[28]

Intentaré ahora explicar brevemente las ventajas de la *tercera* forma de definición.

Para simbolizar que un número b está dado sobre la base de una sucesión fundamental (e_ν), de un orden cualquiera n o α, utilizo la fórmula:

$$b \sim (e_\nu) \quad \text{o} \quad (e_\nu) \sim b.$$

Dada por ejemplo una serie convergente cuyo término general es c_ν, la condición necesaria y suficiente para la convergencia es, como se sabe, ésta: que $\lim_{\nu=\infty} (c_{\nu+1} + \ldots + c_{\nu+\mu}) = 0$ (para un μ arbitrario).

La suma de la serie se define por tanto mediante la fórmula:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \sim \left(\sum_{n=0}^{\nu} c_n \right).$$

Si, por ejemplo, todos los c_n están definidos sobre la base de sucesiones fundamentales de k-ésimo orden, lo mismo es válido para $\sum_{n=0}^{\nu} c_n$, y la suma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ se nos presenta aquí definida por medio de una sucesión fundamental de orden $(k+1)$-ésimo.

Si se ha de describir, por ejemplo, el contenido conceptual del teorema $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, entonces se pueden considerar $\frac{\pi}{2}$ y sus potencias como dados por las fórmulas:

$$\frac{\pi}{2} \sim (a_\nu), \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1} \sim (a_\nu^{2n+1})$$

donde por abreviar hemos usado:

$$2\sum_{n=0}^{\nu} \frac{(-1)^n}{2n+1} = a_\nu.$$

Se cumple además que:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \sim \left(\sum_{m=0}^{\mu}(-1)^m \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m+1}}{(2m+1)!}\right),$$

es decir, $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ se define sobre la base de una sucesión fundamental de segundo orden, y con aquel teorema se expresa la igualdad entre el número racional 1 y un número, $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)$, expresado por medio de una sucesión fundamental de segundo orden.

De forma similar, el contenido conceptual de fórmulas más complicadas, como por ejemplo las de la teoría de las funciones theta, se puede describir de forma precisa y relativamente simple; mientras que es un asunto extremadamente engorroso reducir las sucesiones infinitas a otras formadas puramente por términos racionales, especialmente si el signo debe ser siempre igual, y que converjan absolutamente. En contraposición con la *primera* forma de definición, esta dificultad se evita absolutamente por medio de la *tercera* forma de definición, y es manifiesto que puede ser evitada en tanto no se trate de una aproximación numérica de las sumas de sucesiones mediante números racionales, sino sólo de definiciones absolutamente claras de aquéllas. La *primera* forma de definición no me parece tan fácil de utilizar cuando se trata de la definición precisa de sumas de sucesiones que no convergen absolutamente, sino que el orden de sus términos tanto positivos como negativos es uno previamente determinado. Incluso para sucesiones absolutamente convergentes, la obtención de la suma, aunque ésta sea independiente del orden, sólo es efectivamente realizable para una ordenación determinada; por ello, también en tales casos nos sentimos tentados a dar preferencia a la *tercera* forma de definición sobre la primera. Finalmente, pienso que habla a favor de la *tercera* forma de definición que puede ser generalizada a números *suprafinitos*, mientras que tal desarrollo es completamen-

te *imposible* con la *primera* forma de definición.[29] Esta diferencia se debe simplemente a que la ley conmutativa no es válida en general para números suprafinitos, ya en el caso de la adición; pero la primera forma de definición está *inseparablemente ligada* a esta ley, y se sostiene o cae con ella. Mas para todos los tipos de números para los que es válida la ley conmutativa de la adición, la *primera* forma de definición resulta excelente, abstracción hecha de los puntos señalados.

§ 10.

El concepto del «continuo» no sólo ha desempeñado un importante papel en todo el desarrollo de las ciencias, sino también ha suscitado las mayores diferencias de opinión e incluso las más vehementes disputas. Esto se debe tal vez a que la idea subyacente a aquél, tal como aparecía en las concepciones enfrentadas, adoptaba contenidos distintos, por no haberse transmitido una definición exacta y completa del concepto; quizá incluso, y esto me parece lo más probable, la idea del continuo no fue concebida por aquellos griegos —que pudieron ser los primeros en pensarla— con la claridad y completitud que hubieran sido necesarias para excluir la posibilidad de diferentes interpretaciones entre sus sucesores. Así vemos que Leucipo, Demócrito y Aristóteles consideran el continuo como un compuesto que consta «ex partibus sine fine divisibilibus»,* Epicuro y Lucrecio en cambio lo hacen compuesto de sus átomos, en tanto cosas finitas, lo cual ha dado lugar a una gran controversia entre los filósofos, algunos de los cuales han seguido a Aristóteles y otros a Epicuro. Aun otros, para mantenerse alejados de esta polémica, sostuvieron con Tomás de Aquino[9] que el continuo no se compone ni de infinitas partes ni de una cantidad finita de ellas, sino que *no* consta de partes *en absoluto*; esta última opinión me parece que encierra menos una explicación del asunto, que una tácita confesión de que no se ha alcanzado el fondo de la cuestión y se prefiere eludirla con elegancia. Aquí vemos el *origen escolástico-medieval* de una opinión que aún se

* «De partes divisibles sin fin.» [*N. del ed.*]

defiende hoy en día, según la cual el continuo sería un concepto no analizable o bien, como se expresan otros, una intuición pura *a priori* que apenas sería susceptible de determinación mediante conceptos. Todo *intento de determinación* aritmético de este *misterio* se considerará como una intromisión ilícita y será rechazado con el debido vigor. Los naturales tímidos reciben con esto la impresión de que con el «continuo» no se trata de un *concepto lógico-matemático* sino más bien de un *dogma religioso*.

Está muy lejos de mi intención volver a suscitar estas controversias, y carecería además de espacio para discutirlas con detalle en este estrecho marco; sólo me siento obligado a desarrollar el concepto del continuo con la sobriedad lógica que resulta indispensable para su comprensión y para su empleo en la teoría de conjuntos, tan brevemente como sea posible, y teniendo en consideración sólo la teoría *matemática* de conjuntos. Tratarlo de esta forma no me ha resultado fácil, por la razón de que ni uno sólo de entre los matemáticos cuya autoridad invocaría de buen grado se ha ocupado del continuo en el sentido preciso que yo necesito aquí.[30]

Es verdad que, tomando como base una o más cantidades continuas reales o complejas (o, como yo creo más correctamente expresado, conjuntos numéricos continuos), se ha elaborado lo mejor posible, en las más variadas direcciones, el concepto de un continuo dependiente de una o varias de ellas, esto es, el concepto de función continua, y de esta forma surgió la teoría de las llamadas funciones *analíticas*, así como de las funciones más generales con sus propiedades sumamente notables (como la no diferenciabilidad y otras semejantes). Pero el propio continuo *independiente* sólo ha sido presupuesto por aquellos autores matemáticos en su forma de aparición más simple, y no ha sido objeto de ninguna consideración detallada.

Por de pronto, debo explicar que en mi opinión no es correcto traer a colación el *concepto* o la *intuición del tiempo* en la discusión del concepto mucho más primitivo y general del continuo; el *tiempo* es a mi parecer una representación [Vorstellung] cuya explicación clara presupone el concepto de continuidad, independiente de ella, e incluso con su ayuda no se puede considerar ni como una sustancia, algo objetivo, ni como

algo subjetivo, una forma a priori necesaria de la intuición.[31] No es otra cosa que un *concepto auxiliar y relacional*, a través del cual se constata la relación entre diferentes movimientos que ocurren en la naturaleza y son percibidos por nosotros. Algo así como un *tiempo objetivo* o *absoluto* no se da nunca en la naturaleza, y por tanto el *tiempo* no puede ser considerado como medida del *movimiento*; más bien éste podría ser considerado como medida del *tiempo*, si no se opusiera a esto último que el *tiempo*, incluso en el modesto papel de forma a priori de la intuición *subjetivamente necesaria*, no ha llevado a ningún resultado provechoso e indiscutido, a pesar de que desde Kant no le haya faltado tiempo para ello.

Estoy igualmente convencido de que no es posible en absoluto partir de la llamada *forma de la intuición* del *espacio* para obtener una aclaración del *continuo*, pues sólo con la ayuda de un continuo ya disponible conceptualmente adquieren el *espacio* y las figuras concebidas en él aquel contenido gracias al cual pueden convertirse en objeto no meramente de contemplación estética, de agudeza filosófica o de comparaciones imprecisas, sino de investigaciones matemáticas sobrias y exactas.

No me queda pues sino buscar, con la ayuda del concepto de número real definido en el § 9, un concepto puramente aritmético de continuo de puntos, tan general como sea posible. Me sirve de fundamento para esto, como no podía ser de otro modo, el espacio *aritmético* plano n-dimensional G_n, esto es, la colección de todos los sistemas de valores

$$(x_1 \mid x_2 \mid \ldots \mid x_n)$$

donde cada x puede tomar, independientemente de las otras, *todos* los valores numéricos *reales* de $-\infty$ hasta $+\infty$. A cada uno de tales sistemas de valores en particular lo llamo punto *aritmético* de G_n. La distancia entre dos de tales puntos se define mediante la expresión:

$$+\sqrt{(x'_1 - x_1)^2 + (x'_2 - x_2)^2 + \ldots + (x'_n - x_n)^2}$$

y se entiende como conjunto *aritmético* de puntos P comprendido en G_n toda colección de puntos del espacio G_n dados por medio de una ley. La investigación se dirige ahora, por tanto, a

establecer una definición nítida y al mismo tiempo lo más general posible de *bajo qué condiciones P ha de ser llamado un continuo.*

He demostrado en el *Journal* [*für die reine und angew. Mathematik*] de Borchardt (vol. 84, p. 242) que todos los espacios G_n, por grande que sea el llamado número de dimensiones n, tienen la *misma* potencia y son por lo tanto de la *misma potencia* que el continuo lineal, como digamos la colección de todos los números reales del intervalo (0 ... 1). De ahí que la investigación y determinación de la potencia de G_n se reduzca a la misma cuestión restringida al intervalo (0 ... 1), y espero ser pronto capaz de contestarla, mediante una prueba rigurosa, en el sentido de que la potencia que buscamos no es otra que la de nuestra segunda clase de números (II).[32] De lo cual se sigue que todos los conjuntos infinitos de puntos P tienen o bien la potencia de la primera clase de números (I) o la potencia de la segunda clase de números (II). Aún se puede extraer una consecuencia adicional, que la colección de todas las funciones de una o más variables representables en forma de una serie infinita, no importa cuál, posee *también sólo* la potencia de la segunda clase de números (II), y es por tanto *contable mediante* números de la tercera clase numérica (III).[10] Por consiguiente, esta proposición se aplicará, por ejemplo, a la colección de todas las funciones «analíticas», esto es, funciones de una o más variables obtenidas de series de potencias convergentes por continuación, o al conjunto de todas las funciones de una o más variables reales representables mediante series trigonométricas.

Para aproximarme al concepto general de un continuo localizado en el interior de G_n, recordaré ahora el concepto del derivado $P^{(1)}$ de un conjunto de puntos P dado arbitrariamente, tal como se halla desarrollado por vez primera en *Math. Ann.*, vol. V, y luego en los vols. XV, XVII, XX y XXI, ampliado al concepto de un derivado $P^{(\gamma)}$, donde γ puede ser cualquier número entero de las clase numéricas (I), (II), (III), etc.

Los conjuntos de puntos P se pueden clasificar ahora en dos clases de acuerdo con la potencia de su primer derivado $P^{(1)}$. Si $P^{(1)}$ tiene la potencia de (I), como ya dije en el § 3 de este artículo, puede mostrarse que existe un primer número entero α

de la *primera* o la *segunda* clase de números (II) para el cual $P^{(\alpha)}$ se anula. Pero si $P^{(1)}$ tiene la potencia de la segunda clase de números (II), entonces $P^{(1)}$ se puede descomponer siempre y de una única manera en dos conjuntos R y S tales que

$$P^{(1)} \equiv R + S,$$

donde R y S son de índole extremadamente diferente:[33]

R está constituido de tal modo que es susceptible de continua reducción mediante el proceso reiterado de derivación hasta su aniquilación, de forma que existe siempre un primer número entero γ de las clases numéricas (I) o (II), para el cual

$$R^{(\gamma)} \equiv 0;$$

a tales conjuntos de puntos R los llamo *reductibles*.

Por el contrario, S está constituido de tal modo que el proceso de derivación no produce en este conjunto de puntos absolutamente ninguna modificación, siendo

$$S \equiv S^{(1)},$$

y por consiguiente también

$$S \equiv S^{(\gamma)};$$

a tales conjuntos S los llamo conjuntos de puntos *perfectos*. Podemos decir por lo tanto: si $P^{(1)}$ es de la potencia de la segunda clase de números (II), se descompone en un determinado conjunto de puntos *reductible* y un determinado conjunto de puntos *perfecto*.

Aunque estos dos predicados, «reductible» y «perfecto», no son compatibles en un mismo conjunto de puntos, no es sin embargo lo mismo irreductible que perfecto, y tampoco imperfecto es exactamente lo mismo que reductible, como se ve fácilmente si se presta un poco de atención.

Los conjuntos de puntos *perfectos* no son siempre internamente, de ningún modo, lo que yo, en el trabajo que acabo de citar, he denominado «densos por doquier»;[11] a causa de ello no son adecuados por sí solos para una completa definición de un continuo de puntos; si bien hay que conceder acto seguido que este último debe ser siempre un conjunto *perfecto*.

Para definir el continuo se precisa de un concepto adicional, que habrá de unirse al anterior, a saber, el de conjunto de puntos *T conexo.*

Llamamos a T un conjunto de puntos *conexo* si para cada dos puntos del mismo, t y t', supuesto un número ε arbitrariamente pequeño, existe siempre y de múltiples modos una cantidad *finita* de puntos $t_1, t_2, \ldots, t_v$ de T, de tal manera que las distancias $\overline{tt_1}, \overline{t_1t_2}, \overline{t_2t_3}, \ldots, \overline{t_vt'}$ son todas menores que ε.[34]

Todos los continuos de puntos geométricos conocidos por nosotros caen ahora bajo este concepto de conjunto de puntos *conexo*, como es fácil de ver. Creo pues descubrir en estos *dos* predicados, «perfecto» y «conexo», las características necesarias y *suficientes* de un continuo de puntos, y por lo tanto defino un continuo de puntos en el interior de G_n como un *conjunto perfecto-conexo.*[12] «Perfecto» y «conexo» no son aquí meras palabras, sino predicados completamente generales del *continuo*, caracterizados conceptualmente de la forma más precisa por las definiciones precedentes.

La definición del continuo de Bolzano (*Paradoxien* § 38) ciertamente no es correcta.[35] Expresa unilateralmente solo *una* propiedad del continuo, satisfecha también por conjuntos que resultan de G_n al pensar que se elimina de G_n cualquier conjunto «aislado» de puntos (compárese *Math. Ann.*, vol. 21, p. 51); queda igualmente satisfecha por conjuntos compuestos de varios continuos separados. Es evidente que en ninguno de estos casos hay continuo alguno, aunque según Bolzano así debería ser. Vemos pues que aquí se contraviene la proposición: «A la esencia de cualquier cosa pertenece aquello que, dada la cosa, se afirma necesariamente y, quitada la cosa, se niega necesariamente; o aquello sin lo cual la cosa —y recíprocamente, que sin la cosa— no puede ni existir ni ser concebido».*

Me parece igualmente que en el escrito del señor Dedekind (*Continuidad y números irracionales*) sólo se destaca unilateralmente *otra* de las propiedades del continuo, a saber, aquella que tiene en común con *todos* los conjuntos «*perfectos*».[36]

* En latín en el original. [*N. del ed.*]

§ 11.

Mostraremos ahora cómo se llega a las definiciones de los nuevos números y de qué manera surgen los segmentos naturales que yo llamo *clases numéricas* en la serie absolutamente infinita de los verdaderos números enteros. A esta explicación quiero añadir solamente los principales teoremas sobre la *segunda* clase numérica y su relación con la primera. La sucesión (I) de los verdaderos números enteros positivos $1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots$ tiene su principio de formación en la repetida posición y unión de unidades que se toman por base y son consideradas como iguales; el número ν es la expresión tanto de una determinada cantidad finita de tales posiciones, como de la unión en una totalidad de las unidades puestas. La formación de los verdaderos números enteros finitos se basa pues en el principio de agregar una unidad a un número ya formado y disponible; a este momento, que desempeña también, como enseguida veremos, un papel esencial en la generación de los números enteros superiores, lo llamo *primer principio de generación.*[37] La cantidad de números ν de la clase (I) así formados es infinita y no hay ninguno que sea el mayor de ellos. Aunque sería por tanto contradictorio hablar del mayor número de la clase (I), no hay por otra parte nada objetable en concebir un *nuevo* número, al que llamaremos ω,* que será expresión de que la colección (I) completa está dada regularmente conforme a su sucesión natural. (Similarmente a como ν expresa que una cierta cantidad finita de unidades han sido unidas en una totalidad.) Es admisible incluso considerar al recién creado número ω como el *límite* al cual tienden los números ν, siempre y cuando no se entienda por esto sino que ω ha de ser el *primer* número entero que sigue a todos los números ν; esto es, ha de ser considerado mayor que cualquiera de los números ν. Al hacer que la posición del número ω venga seguida de la posición de unidades adicionales, se obtienen con

* De ahora en adelante sustituyo por ω el signo ∞, que he usado en el n° 2 de este artículo (vol. XVII, p. 357 [*Abhandlungen*, 147]), puesto que el signo ∞ se ha empleado ya múltiples veces para designar infinitos indeterminados. [*N. del a.*]

ayuda del *primer* principio de generación los números subsiguientes:

$$\omega + 1, \omega + 2, \ldots, \omega + \nu, \ldots ;$$

puesto que nuevamente no se llega a un mayor número, se concebirá uno nuevo, que podemos llamar 2ω[38] y que debe ser el primero que sigue a todos los números anteriores ν y $\omega+\nu$; si se aplica reiteradamente el *primer* principio de generación sobre el número 2ω, se obtiene la continuación de los números precedentes:

$$2\omega + 1, 2\omega + 2, \ldots, 2\omega + \nu, \ldots .$$

La función lógica que nos ha proporcionado los dos números ω y 2ω es manifiestamente distinta del *primer* principio de generación; la llamaré *segundo principio de generación* de verdaderos números enteros y la defino más detalladamente así: dada una determinada sucesión de verdaderos números enteros definidos, entre los cuales no hay uno que sea el mayor de ellos, en virtud de este segundo principio de generación se crea un nuevo número al que se concibe como el *límite* de aquellos números, esto es, se define como el número inmediatamente mayor que todos ellos.

Así pues, mediante la aplicación combinada de ambos principios de generación se obtienen sucesivamente las siguientes continuaciones de los números obtenidos hasta el momento:

$$3\omega, 3\omega + 1, \ldots, 3\omega + \nu, \ldots$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$\mu\omega, \mu\omega + 1, \ldots, \mu\omega + \nu, \ldots$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

Pero tampoco con esto se llegará a un fin, puesto que entre los números $\mu\omega + \nu$ no hay tampoco ninguno que sea el mayor.

El segundo principio de generación nos induce por tanto a introducir un sucesor inmediato de todos los números $\mu\omega + \nu$, al que podemos llamar ω^2. Siguen a éste en sucesión determinada los números:

$$\lambda\omega^2 + \mu\omega + \nu,$$

y observando los dos principios de generación se llega obviamente a números de la siguiente forma:

$$\nu_0\omega^{\mu} + \nu_1\omega^{\mu-1} \ldots + \nu_{\mu-1}\omega + \nu_{\mu}.$$

Pero el segundo principio de generación nos empuja entonces a poner un nuevo número, que debe ser inmediatamente superior a todos esos números y que será oportunamente designado por:

$$\omega^{\omega}.$$

Como puede verse, la formación de nuevos números no tiene fin; observando *ambos* principios de generación se obtienen una y otra vez nuevos números y series numéricas, en una sucesión completamente determinada.

Por esta razón, la primera *apariencia* es que con este modo de formación de nuevos números enteros infinitos determinados habríamos de perdernos en lo *ilimitado,* y que seríamos incapaces de dar a este proceso sin fin una *cierta* terminación *provisional*, para conseguir así una limitación semejante a la que existía de hecho, en cierto sentido, respecto a la antigua clase numérica (I); allí se hacía uso sólo del *primer* principio de generación y era por tanto imposible salirse de la sucesión (I). Pero el *segundo* principio de generación no sólo tenía que conducirnos fuera del anterior dominio numérico, sino que se muestra en efecto como un medio que, en unión con el *primer* principio de generación, nos capacita para *traspasar toda frontera* en la formación conceptual de verdaderos números enteros.

Pero observemos ahora que todos los números obtenidos hasta el momento, y los que les siguen inmediatamente, satisfacen una cierta condición; *si se establece como requisito para todos los números que se formen a continuación*, esta condición se muestra como un nuevo principio, el *tercer* principio, que se añade a los otros dos. Lo llamo *principio de restricción o de limitación* y tiene por efecto, como mostraré, que la segunda clase numérica (II), definida con su ayuda, no sólo tiene una potencia superior a la de (I), sino precisamente la *inmediatamente superior*, y por tanto la *segunda potencia.*

La mencionada condición, que cumple cualquiera de los números infinitos α definidos hasta el momento, como nos con-

vencemos enseguida, es: que el conjunto de todos los números que le preceden en la sucesión numérica tiene la potencia de la primera clase numérica (I). Tomemos por ejemplo el número ω^ω, entonces los que le preceden están comprendidos en la fórmula:

$$\nu_0\omega^\mu + \nu_1\omega^{\mu-1} + \ldots + \nu_{\mu-1}\omega + \nu_\mu ,$$

donde $\mu, \nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_\mu$ han de tomar todos los valores numéricos enteros positivos y finitos, incluyendo el cero pero excluyendo la combinación: $\nu_0 = \nu_1 = \ldots = \nu_\mu = 0$.

Como es sabido, este conjunto puede ponerse en la forma de una sucesión infinita simple,[39] y tiene por consiguiente la potencia de (I).

Puesto que además una sucesión cualquiera de conjuntos cada uno de los cuales tiene la *primera* potencia, si esta sucesión misma es de la *primera* potencia, siempre produce nuevamente un conjunto que tiene la potencia de (I), resulta claro que continuando nuestra sucesión numérica *primeramente* se obtienen *una y otra vez sólo números tales que realmente* cumplen aquella condición.

En consecuencia, definimos la segunda clase numérica (II) como *la colección de todos los números* α *que se pueden construir con la ayuda de los dos principios de generación y que se suceden en sucesión determinada:*

$$\omega, \omega + 1, \ldots, \nu_0\omega^\mu + \nu_1\omega^{\mu-1} + \ldots + \nu_{\nu-1}\omega + \nu_\mu, \ldots, \omega^\omega, \ldots, \alpha, \ldots$$

la cual está sometida a la condición de que todos los números que preceden al número α*, de 1 en adelante, forman un conjunto de la potencia de la clase numérica* (I).

§ 12.

Lo primero que hemos de establecer ahora es el teorema según el cual *la nueva clase numérica (II) tiene una potencia diferente de aquella de la primera clase numérica (I).*

Esta proposición se sigue del teorema siguiente:

«Siendo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$ un conjunto *cualquiera*, que tenga la primera potencia, de números diferentes de la *segunda* clase

(de manera que estamos autorizados a suponerlos en forma de sucesión (α_ν) simple), entonces o bien hay uno que es el mayor de ellos, llamémosle γ, o bien, si ése no es el caso, existe un cierto número β de la segunda clase de números (II) que no figura entre los números α_ν, de modo que β es mayor que todo α_ν y tal que, por el contrario, todo número $\beta' < \beta$ es superado en magnitud por ciertos números de la sucesión (α_ν); el número γ o β, respectivamente, puede ser legítimamente denominado el límite superior del conjunto (α_ν)».

La demostración de este teorema es sencillamente la que sigue: sea $\alpha_{\chi 2}$; el primer número de la sucesión (α_ν) que es mayor que α_1; $\alpha_{\chi 3}$, el primero que es mayor que $\alpha_{\chi 2}$; y así sucesivamente.

Se tiene entonces que:

$$1 < \chi_2 < \chi_3 < \chi_4 < \ldots$$
$$\alpha_1 < \alpha_{\chi 2} < \alpha_{\chi 3} < \alpha_{\chi 4} < \ldots$$

y

$$\alpha_\nu < \alpha_{\chi\lambda}$$

siempre que

$$\nu < \chi_\lambda.$$

Puede suceder ahora que a partir de un cierto número $\alpha_{\chi\rho}$ todos los que le siguen en la sucesión (α_ν) sean menores que él; entonces es evidentemente el mayor de todos y tenemos que $\gamma = \alpha_{\chi\rho}$. En el caso contrario, concebimos el conjunto de todos los números enteros, a partir del 1, que son menores que α_1; añadamos primero a este conjunto el conjunto de todos los números enteros $\geq \alpha_1$ y $< \alpha_{\chi 2}$, después el conjunto de todos los números $\geq \alpha_{\chi 2}$ y $< \alpha_{\chi 3}$, y así sucesivamente. Se obtiene entonces un cierto subconjunto de números sucesivos de nuestras dos primeras clases numéricas, y este conjunto es evidentemente de la *primera* potencia,[40] y por lo tanto existe —conforme a la definición de (II)— un cierto número β de la colección (II) que es inmediatamente mayor que aquellos números. Por lo tanto $\beta > \alpha_{\chi\lambda}$, y por ello también $\beta > \alpha_\nu$, porque siempre se puede tomar χ_λ tan grande que sea mayor que un ν dado, y porque entonces $\alpha_\nu < \alpha_{\chi\lambda}$.

Se ve fácilmente, por otra parte, que todo número $\beta' < \beta$ es superado en magnitud por ciertos números α_{χ_ν} con lo cual quedan demostradas todas las partes del teorema.

De aquí se sigue ahora el teorema según el cual la totalidad de los números de la segunda clase numérica (II) no tiene la potencia de (I); pues en caso contrario podríamos imaginar la colección completa (II) dada en la forma de una sucesión simple:

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \ldots,$$

la cual, según la proposición que acabamos de demostrar, o bien tiene un término γ que es el mayor de todos, o bien todos sus términos α_ν serían superados en magnitud por un cierto número β de (II). El numero $\gamma+1$ —perteneciente a la clase (II)— en el primer caso, o el número β en el segundo caso, pertenece por una parte a la clase (II), pero por otra parte no figura en la sucesión (α_ν); lo cual, dada la supuesta identidad entre el conjunto (II) y (α_ν), es una contradicción. La clase numérica (II) tiene por consiguiente una potencia distinta que la clase numérica (I).

De un teorema que presentaré y demostraré enseguida se sigue con certeza que de entre las dos potencias de las clases numéricas (I) y (II), la segunda es en realidad la *inmediata sucesora* de la primera, esto es, que entre ambas potencias no existe ninguna otra.

Mas si previamente volvemos la vista atrás y consideramos los medios que nos han conducido no sólo a una extensión del concepto de verdadero número entero, sino también a una nueva potencia de conjuntos bien definidos diferente de la primera, veremos que entraron en juego tres momentos lógicos destacados, que deben ser distinguidos unos de otros. Se trata de los *dos principios de generación* definidos más arriba, a los que se añade un *principio de restricción* o *limitación*, que consiste en la exigencia de que sólo se proceda a la creación de un nuevo número entero con la ayuda de uno de los otros dos principios, si la totalidad de los números precedentes tiene la potencia de una clase numérica definida, disponible ya en toda su extensión. De esta manera, observando estos tres principios se pueden alcanzar con la mayor seguridad y evidencia clases numéricas siempre nuevas, y con ellas todas las diferentes potencias sucesiva-

mente crecientes que se dan en la naturaleza corpórea y mental; y los nuevos números así obtenidos tienen siempre absolutamente la misma determinación concreta y realidad objetiva que los anteriores. Por ello no sabría, en verdad, qué podría detenernos en esta actividad de formación de nuevos números, en tanto se demuestre que la introducción de una nueva entre estas innumerables clases numéricas resulta deseable o incluso imprescindible para el progreso de las ciencias.

§ 13.

Llego ahora a la prometida demostración de que las potencias de (I) y (II) se siguen inmediatamente la una a la otra, de modo que no hay ninguna otra potencia entre ellas.

Si se selecciona conforme a alguna regla un conjunto (α') de números diferentes α' de la colección (II), esto es, si se concibe un conjunto (α') contenido en (II), entonces tal conjunto tiene siempre peculiaridades que pueden expresarse en las siguientes proposiciones.[41]

«Entre los números del conjunto (α') hay siempre uno que es el *menor*.»

«Si se tiene en particular una sucesión de números de la colección (II): $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\beta, \ldots$ que continuamente decrece en magnitud (de modo que $\alpha_\beta > \alpha_{\beta'}$ si $\beta' > \beta$), entonces esta sucesión se interrumpe necesariamente con un término de orden finito, y termina con el más pequeño de los números. La sucesión no puede ser infinita.»

Resulta notable que esta proposición, inmediatamente clara cuando los α_β son números enteros finitos, puede demostrarse también para el caso de números α_β infinitos. En efecto, según la proposición anterior —que se deduce fácilmente de la definición de la sucesión numérica (II)— entre los números α_ν, tomando en consideración sólo aquellos para los cuales el índice ν es finito, hay uno que es el más pequeño; si éste es, digamos, $= \alpha_n$, resulta obvio que, puesto que $\alpha_\nu > \alpha_{\nu+1}$, la sucesión α_ν y por tanto también la sucesión completa α_β debe constar exactamente de n miembros, y por consiguiente es una sucesión finita.

Se obtiene ahora el siguiente teorema fundamental:

«Si (α') es un conjunto numérico cualquiera contenido en la colección (II), pueden ocurrir sólo los tres casos siguientes: o bien (α') es una colección finita, esto es, consta de una cantidad finita de números, o (α') tiene la potencia de la primera clase o, en tercer lugar, (α') tiene la potencia de (II); Quartum non datur».*

La demostración se puede obtener de manera simple como sigue: sea Ω el primer número de la *tercera* clase numérica (III); todos los números α' del conjunto (α') son entonces menores que Ω, puesto que aquél está incluido en (II).

Pensemos ahora en los números α' ordenados según su magnitud; sea α_ω el más pequeño de ellos, $\alpha_{\omega+1}$ el siguiente en magnitud, y así sucesivamente. Así se obtiene el conjunto (α') en la forma de un conjunto «bien ordenado» α_β, donde β recorre números de nuestra sucesión numérica ampliada a partir de ω; evidentemente β se mantiene siempre menor o igual que α_β, y puesto que $\alpha_\beta < \Omega$, también $\beta < \Omega$. El número β no puede en consecuencia sobrepasar la clase numérica (II), sino que permanece dentro del dominio de ésta. De ahí que sólo puedan suceder tres casos: o bien β se mantiene por debajo de un número especificable de la sucesión $\omega + \nu$, y entonces (α') es un conjunto finito; o β adopta todos los valores de la sucesión $\omega + \nu$, pero se mantiene por debajo de un número especificable de la sucesión (II), y entonces (α') es obviamente un conjunto de la *primera* potencia; o, en tercer lugar, β toma también valores arbitrariamente grandes en (II), y entonces β recorre *todos* los números de (II); en este último caso la colección (α_β), esto es, el conjunto (α'), tiene evidentemente la potencia de (II); como queríamos demostrar.

Como resultado inmediato del teorema que acabamos de demostrar, resultan ahora los siguientes:

«Si se tiene un conjunto bien definido M de la potencia de la clase numérica (II) y se toma cualquier subconjunto infinito M' de M, entonces o bien la colección M' puede concebirse en la forma de una sucesión infinita simple, o bien es posible establecer una correspondencia biunívoca entre los dos conjuntos M y M'».

* «Sin que exista un cuarto.» [*N. del ed.*]

«Si se tiene cualquier conjunto bien definido M de la segunda potencia, un subconjunto M' de M y un subconjunto M'' de M', y se sabe que este último M'' se puede poner en correspondencia biunívoca con el primero, M, entonces también se puede siempre poner en correspondencia biunívoca el segundo, M', con el primero, y en consecuencia también con el tercero.»

Formulo aquí este último teorema, dada su conexión con el precedente, bajo el supuesto de que M tiene la potencia de (II); obviamente, también es cierto cuando M tiene la potencia de (I); pero me parece sumamente destacable, y por ello lo resalto explícitamente, que esta proposición tiene validez *general*, sin importar la potencia que pueda corresponder a M. Trataré este asunto más de cerca en un artículo posterior, y mostraré allí el peculiar interés que entraña este teorema general.[42]

§ 14.

Ahora, para concluir, someteré aún a consideración los números de la segunda clase numérica (II) y las operaciones realizables con ellos, si bien en esta ocasión me limitaré sólo a lo más inmediato, reservándome para más adelante la publicación de investigaciones detalladas acerca del tema.[43]

En el § 1 definí en general las operaciones de adición y multiplicación y mostré que, para los números enteros infinitos, *no* están sujetas en general a la ley conmutativa, aunque sí a la asociativa; esto es válido también para los números de la segunda clase numérica en particular. Con respecto a la ley distributiva, sólo es válida en general bajo la siguiente forma:

$$(\alpha+\beta)\,\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$$

(donde $\alpha+\beta$, α, β actúan como multiplicadores),

como se reconoce inmediatamente mediante la intuición interna.

La sustracción se puede considerar de dos maneras. Si α y β son dos números enteros cualesquiera, $\alpha < \beta$, se convence uno con facilidad de que la ecuación

$$\alpha + \xi = \beta$$

admite siempre una solución, y sólo una, para ξ; donde, si α y β son números de (II), ξ será un número de (I) o de (II). Diremos que este número ξ es igual a $\beta-\alpha$.

En cambio, si se considera la siguiente ecuación:

$$\xi + \alpha = \beta$$

nos encontramos con que a menudo no admite absolutamente ninguna solución para ξ; este caso ocurre por ejemplo con la siguiente ecuación:

$$\xi + \omega = \omega+1.$$

Pero también en los casos en que la ecuación $\xi + \alpha = \beta$ es resoluble para ξ, ocurre a menudo que queda satisfecha por infinitos valores numéricos de ξ; aunque una de estas diferentes soluciones será siempre la menor.

Para esta menor raíz de la ecuación:

$$\xi + \alpha = \beta,$$

en caso de que esta última sea de hecho resoluble, escogemos la denominación $\underline{\beta}_{\alpha}$, que en consecuencia ha de ser en general distinguida de $\beta-\alpha$, número este último que siempre existe, con sólo que $\alpha < \beta$.

Si además entre los tres números enteros β, α, γ se da la ecuación:

$$\beta = \gamma\alpha$$

(donde γ es el multiplicador), se convence uno con facilidad de que la ecuación:

$$\beta = \xi\alpha$$

no tiene otra solución para ξ que $\xi = \gamma$, y en este caso se designa γ por $\frac{\beta}{\alpha}$.

Por el contrario, nos encontramos con que la ecuación:

$$\beta = \alpha\xi$$

(donde ξ es el multiplicando), cuando es de hecho resoluble para ξ, tiene a menudo varias y hasta infinitas raíces; pero una de ellas es siempre la menor. Desígnese a esta menor raíz que

satisface la ecuación $\beta = \alpha\xi$, si esta última es de hecho resoluble, por:

$$\frac{\beta}{\alpha}.$$

Los números α de la segunda clase numérica son de dos tipos: 1) α tales que tienen un término inmediatamente precedente en la sucesión, que es entonces $\alpha-1$; a estos números los llamo del primer tipo. 2) α tales que no tienen un término inmediatamente precedente en la sucesión, para los cuales $\alpha-1$ no existe; a estos números los llamo del *segundo* tipo. Los números ω, 2ω, $\omega^{\nu}+\omega$, ω^{ω} son por ejemplo del segundo tipo; por el contrario, $\omega+1$, $\omega^2+\omega+2$, $\omega^{\omega}+3$ son del primer tipo.

En correspondencia con ello, también los números primos de la segunda clase, que definí en general en el § 1, se dividen en números primos del segundo y del primer tipo.

Números primos del segundo tipo son, en su orden de aparición en la clase numérica (II), los siguientes:

$$\omega,\ \omega^{\omega},\ \omega^{\omega^2},\ \omega^{\omega^3},\ \ldots,$$

de modo que, entre todos los números de la forma:

$$\varphi = \nu_0\,\omega^{\mu} + \nu_1\,\omega^{\mu-1} + \ldots + \nu_{\mu-1}\omega + \nu_{\mu}$$

existe un *único* número primo del *segundo* tipo, ω. Pero no se deduzca de esta distribución relativamente escasa de los números primos del segundo tipo que la colección de todos ellos tiene una potencia inferior a la de la misma clase numérica (II); dicha colección resulta tener la misma potencia que (II).

Los números primos del primer tipo son, por de pronto:

$$\omega + 1,\ \omega^2 + 1,\ \ldots,\ \omega^{\mu} + 1,\ \ldots$$

Éstos son los únicos números primos del primer tipo que ocurren entre los números que acabamos de designar por φ; la totalidad de los números primos del primer tipo en (II) tiene igualmente la potencia de (II).

Los números primos del segundo tipo tienen una propiedad que les confiere un carácter completamente aparte; si η es uno de tales números primos (del segundo tipo), entonces siempre $\eta\alpha = \eta$, cuando α es un número cualquiera más pequeño

que η; de aquí se sigue que, si α y β son dos números cualesquiera, ambos más pequeños que η, entonces el producto $\alpha\beta$ también es siempre más pequeño que η.

Si nos limitamos de momento a los números de la segunda clase numérica que tienen la forma φ, encontramos para ellos las siguientes reglas de adición y multiplicación. Sean:

$$\varphi = \nu_0\omega^{\mu} + \nu_1\omega^{\mu-1} + \ldots + \nu_{\mu}$$
$$\psi = \rho_0\omega^{\lambda} + \rho_1\omega^{\lambda-1} + \ldots + \rho_{\lambda},$$

donde ν_0 y ρ_0 se suponen diferentes de cero.

Adición.

1) Si $\mu < \lambda$, se tiene entonces:

$$\varphi + \psi = \psi.$$

2) Si $\mu > \lambda$, se tiene entonces:

$$\varphi + \psi = \nu_0\omega^{\mu} + \ldots + \nu_{\mu-\lambda-1}\omega^{\lambda+1} + (\nu_{\mu-\lambda} + \rho_0)\omega^{\lambda} + \rho_1\omega^{\lambda-1} + \rho_2\omega^{\lambda-2} + \ldots + \rho_{\lambda}.$$

3) Para $\mu = \lambda$ resulta:

$$\varphi + \psi = (\nu_0 + \rho_0)\omega^{\lambda} + \rho_1\omega^{\lambda-1} + \ldots + \rho_{\lambda}.$$

Multiplicación.

1) Si ν_{μ} es diferente de cero, se tiene entonces:

$$\varphi\psi = \nu_0\omega^{\mu+\lambda} + \nu_1\omega^{\mu+\lambda-1} + \ldots + \nu_{\nu-1}\omega^{\lambda+1} + \nu_{\mu}\rho_0\omega^{\lambda} + \rho_1\omega^{\lambda-1} + \ldots + \rho_{\lambda}.$$

En caso de que $\lambda = 0$, el último término de la derecha es: $\nu_{\mu}\rho_0$.

2) Si $\nu_{\mu} = 0$, se tiene entonces:

$$\varphi\psi = \nu_0\omega^{\mu+\lambda} + \nu_1\omega^{\mu+\lambda-1} + \ldots + \nu_{\mu-1}\omega^{\lambda+1} = \varphi\omega^{\lambda}.$$

La descomposición de un número φ en sus factores primos es como sigue. Si se tiene:

$$\varphi = c_0\omega^{\mu} + c_1\omega^{\mu_1} + c_2\omega^{\mu_2} + \ldots + c_\sigma\omega^{\mu_\sigma}$$

donde

$$\mu > \mu_1 > \mu_2 > \ldots > \mu_\sigma$$

y

$$c_0, c_1, \ldots, c_\sigma$$

son números finitos positivos diferentes de cero, entonces:

$$\varphi = c_0(\omega^{\mu-\mu_1} + 1)c_1(\omega^{\mu_1-\mu_2} + 1)\, c_2 \ldots c_{\sigma-1}(\omega^{\mu_{\sigma-1}-\mu_\sigma} + 1)c_\sigma\omega^{\mu_\sigma};$$

si además concebimos a c_0, c_1, ... $c_{\sigma-1}$, c_σ descompuestos en factores primos según las reglas de la primera clase numérica, tenemos entonces la descomposición de φ en factores primos; pues los factores $\omega^{\gamma}+1$ y ω son ellos mismos, como se observó arriba, números primos. Esta descomposición de los números de la forma φ está determinada de manera única también respecto al orden de los factores, si se hace abstracción de la conmutatividad de los factores primos dentro de los distintos *c*, y si se establece que el último factor debe ser una potencia de ω o igual a uno, y que ω sólo aparecerá como factor en la última posición. En una ocasión posterior escribiré sobre la generalización de esta descomposición en factores primos a números α cualesquiera de la segunda clase numérica (II).

ANOTACIONES

AL § 1.

1. *Teoría de variedades* [*Mannigfaltigkeitslehre*]. Con esta palabra designo el concepto de una doctrina muy amplia, que hasta ahora sólo he tratado de elaborar bajo la forma especial de una teoría de conjuntos aritméticos o geométricos. A saber, entiendo en general por variedad o conjunto toda multiplicidad que puede ser pensada como unidad, esto es, toda colección de elementos determinados que pueden ser unidos en una totalidad mediante una ley.[44] Y creo haber definido con ello algo semejante al εἶδος o ἰδέα platónicos, como también a lo que Platón llama μιχτόν en su diálogo «Filebo, o el bien supremo». A éste opone el ἄπειρον, esto es, lo ilimitado, indeterminado, que yo denomino infinito impropio, así como el πέρας,* esto es, el límite, y lo explica como una «mezcla» ordenada de ambos. Platón mismo indica que estos conceptos son de origen pitagórico; véase A. Boeckh, *Philolaos des Pythagoreers Lehren* [Doctrinas de Filolao el pitagórico]. Berlín 1819.

AL § 4.

2. *Aristóteles.* Véase la exposición de Zeller en su gran obra: *Die Philosophie der Griechen* [La filosofía de los griegos], 3ª edición, parte II, sección 2, p. 393 hasta 403. La concepción platónica del infinito es completamente diferente de la de Aristóteles; véase Zeller, parte II, sección 1, pp. 628-646. También encuentro puntos de contacto con

* Los términos griegos se leen, respectivamente: *eidos* (forma), *idea* (idea), *miktón* (mezcla), *ápeiron* (ilimitado, infinito), *peras* (límite). [*N. del ed.*]

mi concepción en la filosofía de Nicolás de Cusa. Véase: R. Zimmermann, «Der Cardinal Nicolaus von Cusa als Vorgänger Leibnizens» [El cardenal N. de C. como antecesor de Leibniz]» (*Sitzungsberichte der Wiener Akademie der Wissenschaften*, año 1852). Lo mismo digo respecto a Giordano Bruno, el sucesor de Nicolás. Vease Brunnhofer, *Giordano Bruno's Weltanschauung und Verhängniss* [La cosmovisión y la fatalidad de G. B.], Leipzig 1882.

Ahora bien, existe una diferencia esencial en el hecho de que yo he fijado en su concepto, de una vez y para siempre, las diferentes gradaciones del infinito propio mediante las clases numéricas (I), (II), (III), etc., y sólo entonces considero como tarea no sólo investigar matemáticamente las relaciones entre los números suprafinitos, sino también perseguirlos y mostrarlos dondequiera que ocurran en la naturaleza. No admite para mí ninguna duda que siguiendo este camino llegaremos siempre más allá, sin encontrar ningún límite insuperable, pero sin conseguir tampoco una captación siquiera aproximada de lo Absoluto. Lo Absoluto sólo puede ser reconocido, pero nunca conocido, ni siquiera aproximadamente conocido. Pues así como dentro de la primera clase numérica (I) todo número finito, por grande que sea, tiene ante sí la misma potencia de números finitos mayores que él, así también a cada número suprafinito de cualquiera de las clases numéricas superiores (II), (III), etc., por grande que sea, le sigue una colección de números y clases numéricas que en lo relativo a potencia no se ve reducido en lo más mínimo, comparado con la totalidad de la colección absolutamente infinita de números comenzando por 1. Sucede con ello algo parecido a lo que Albrecht von Haller dijo de la eternidad: «Yo lo retiro [el número inmenso] y tú [la eternidad] permaneces entera ante mí». Por eso la sucesión absolutamente infinita de números me parece en cierto sentido un símbolo adecuado de lo absoluto; mientras que la infinidad de la primera clase numérica (I), la única que hasta ahora ha servido para ello, me parece disolverse por completo en la nada en comparación con aquélla, justamente porque la considero como una idea (no una imagen) concebible. También me parece destacable esto: que a cada una de las clases numéricas, y también por tanto a cada potencia, corresponde un número completamente determinado de la colección absolutamente infinita de números, y de tal modo que para cada número suprafinito γ existe también una potencia que llamamos la γ-ésima; las diferentes potencias forman también, por lo tanto, una sucesión absolutamente

infinita.[145] Esto es tanto más sorprendente cuanto que el número γ que indica el orden de una potencia (en caso de que γ tenga un predecesor inmediato) está en una relación de magnitud tal con los números de la clase numérica que tiene esa potencia, que su pequeñez desafía toda descripción, y tanto más cuanto más grande supongamos γ.

AL § 5.

3. *determinari possunt*. No puedo atribuir ningún ser a los infinitos impropios, indeterminados, variables, sea cual sea la forma en que se presenten; ya que no son sino conceptos relacionales o bien representaciones puramente subjetivas (respectivamente, intuiciones, imaginaciones), pero en ningún caso ideas adecuadas. Por tanto, podría suscribir la frase «infinitum actu non datur» si se refiriese sólo al infinito impropio, pero entonces sería una pura tautología. El sentido de esta frase en las fuentes indicadas parece expresar más bien la imposibilidad de poner conceptualmente una infinitud determinada, y con este sentido la considero falsa.

AL § 7.

4. *Realistas*. El punto de vista positivista y realista respecto al infinito se encuentra explicado por ejemplo en Dühring, *Natürliche Dialectik* [Dialéctica natural], Berlin 1865, pp. 109-135 y en Von Kirchmann, *Katechismus der Philosophie* [Catecismo de filosofía], pp. 124-130. Compárense también las notas de Ueberweg al *Tratado sobre los principios del conocimiento humano* de Berkeley, en la biblioteca filosófica de Von Kirchmann. Sólo puedo repetir que coincido esencialmente con todos estos autores en la apreciación del infinito impropio; la diferencia radica sólo en que este infinito sincategoremático es considerado por ellos como el único infinito concebible mediante «expresiones» o conceptos, y en este caso conceptos meramente relacionales. Las demostraciones de Dühring contra el infinito propio podrían ser expresadas en muchas menos palabras y equivalen, según me parece, bien a que el número finito determinado, por grande que lo concibamos, nunca puede ser un número infinito, lo

cual se sigue inmediatamente de su concepto; o bien a que no se puede concebir con el predicado de la determinación el número finito variable ilimitadamente grande, y por tanto tampoco con el predicado de la existencia, lo que de nuevo resulta inmediatamente de la esencia de la variabilidad. No me cabe duda de que con esto no queda afectada en lo más mínimo la inteligibilidad de los números determinados suprafinitos, y sin embargo estas demostraciones se tienen por pruebas contra la realidad de los números suprafinitos. Esta argumentación me parece como si se quisiera concluir que, puesto que hay innumerables intensidades de verde, no puede haber rojo. Resulta extraño, sin embargo, que el mismo Dühring admita en la p. 126 de su tratado que para explicar la «posibilidad de una síntesis ilimitada» debe haber un fundamento, que él califica como «comprensiblemente, desconocido por completo». A mi parecer, hallamos aquí una contradicción.

Pero nos encontramos con que también los pensadores próximos al idealismo o que incluso le rinden franco homenaje niegan toda legitimidad a los números infinitos determinados.

Chr. Sigwart, en su excelente obra *Logik*, vol. II, *Die Methodenlehre* [Doctrina del método] (Tübingen 1878), argumenta exactamente igual que Dühring y dice en la página 47: «un número infinito es una *contradictio in adjecto*».*

Algo semejante encontramos en Kant y J. F. Fries; de este último, compárese: *System der Metaphysik* [Sistema de metafísica] (Heidelberg 1824) §§ 51 y 52. Tampoco los filósofos de la escuela hegeliana admiten los números propiamente infinitos; citaré sólo la meritoria obra de K. Fischer, su *System der Logik und Metaphysik oder Wissenschaftslehre* [Sistema de lógica y metafísica, o doctrina de la ciencia] 2ª ed. (Heidelberg 1865), p. 275.

al § 8.

5. Lo que aquí llamo realidad intrasubjetiva o inmanente de conceptos o ideas podría concordar con la determinación «adecuada», en el sentido en que Spinoza usa esta palabra cuando dice (*Ética*, parte II, def. IV): «Por idea adecuada entiendo la idea que, considerada en sí

* «Contradicción en los términos.» [*N. del ed.*]

misma sin relación con el objeto, tiene todas las propiedades o denominaciones intrínsecas de una verdadera idea».

6. Esta convicción coincide esencialmente tanto con los principios del sistema platónico como con un rasgo esencial del sistema de Spinoza; respecto al primero remito a Zeller, *Die Philosophie der Griechen*, 3ª ed., parte II, secc. 1, pp. 541-602. Al principio de la sección se dice: «Sólo el saber conceptual da acceso (según Platón) a un verdadero conocimiento. Pero en tanto a nuestras representaciones les corresponde la verdad —este presupuesto lo comparte Platón con otros (Parménides)— a su objeto debe igualmente corresponderle realidad, y viceversa. Lo que se puede conocer, es; lo que no se puede conocer, no es; y en la misma medida en que algo es, es también cognoscible».

En cuanto a Spinoza, me basta recordar su proposición de la ÉTICA, parte II, prop. VII: «El orden y la conexión de las ideas es el mismo que el orden y la conexión de las cosas».*

También en la filosofía de Leibniz puede demostrarse el mismo principio epistemológico. Tan sólo a partir del empirismo, sensualismo y escepticismo modernos, así como del criticismo kantiano nacido de ellos, se creyó que la fuente del conocimiento y de la certeza está localizada en los sentidos o bien en las llamadas formas puras de la intuición del mundo representacional, y que a ellos debemos limitarnos.[146] En mi opinión, estos elementos no suministran absolutamente ningún conocimiento seguro, ya que éste sólo se puede obtener mediante conceptos e ideas que a lo sumo son sugeridos por la experiencia externa, pero que en lo esencial se forman por inducción y deducción internas, como algo que de algún modo estaba ya en nosotros y sólo es despertado y traído a la conciencia.

al § 8 y § 9.

7. y 8. A mi parecer, el proceso de formación correcta de conceptos es siempre el mismo; se pone un objeto carente de propiedades, que al principio no es otra cosa que un nombre o un signo A, y se le asignan ordenadamente varios predicados inteligibles, o incluso una cantidad

* Las dos citas de Spinoza aparecen en latín en el original. [*N. del ed.*]

infinita, cuyo significado es conocido en base a ideas ya disponibles, y que no pueden contradecirse entre sí. De este modo quedan determinadas las relaciones de A con los conceptos ya disponibles, y particularmente con los que están emparentados con él. Una vez llevado esto hasta el final, se dan todas las condiciones para despertar el concepto *A*, que dormía en nuestro interior, y éste accede listo a la existencia,[47] dotado de realidad intrasubjetiva, única que debe exigirse siempre a los conceptos; constatar su significado transiente es entonces asunto de la metafísica.

al § 10.

9. Tomás de Aquino, *Opuscula*, XLII *de natura generis*, cap. 19 et 20; LII *de natura loci*; XXXII *de natura materiae et de dimensionibus interminatis*. Compárense: C. Jourdin, *La Philosophie de Saint Thomas d'Aquin*, pp. 303-329; K. Werner, *Der heilige Thomas von Aquino* (Regensburg 1859), vol. 2, pp. 177-201.

10. Incluso la colección de todas las funciones continuas, y también la de todas las funciones integrables de una o más variables,[48] deberían tener sólo la potencia de la segunda clase numérica (II); sin embargo, si se abandonan todas las restricciones y se considera la colección de todas las funciones continuas y discontinuas de una o más variables, este conjunto tiene la potencia de la tercera clase numérica (III).

11. Acerca de los conjuntos perfectos se puede demostrar el siguiente teorema: que nunca tienen la potencia de (I).

Como ejemplo de un conjunto de puntos perfecto que no es denso por doquier en ningún intervalo, por pequeño que éste sea, menciono la colección de todos los números reales comprendidos por la fórmula:

$$z = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \ldots + \frac{c_\nu}{3^\nu} + \ldots,$$

donde los coeficientes c_n han de tomar uno de los dos valores 0 y 2 a voluntad, y la serie puede constar de una cantidad tanto finita como infinita de términos.[49]

12. Obsérvese que esta definición de un continuo está libre de toda referencia a lo que se denomina la dimensión de una configuración continua; en particular, la definición abarca también continuos formados por fragmentos conexos de diferentes dimensiones, como líneas, superficies, cuerpos, etc. En una ocasión posterior mostraré cómo se llega ordenadamente de este continuo general a los continuos especiales con dimensión determinada. Sé muy bien que la palabra «*continuo*» no ha recibido hasta la fecha *ningún* significado *fijo* en matemática, por lo cual mi definición será juzgada por unos como demasiado *estrecha* y por otros como demasiado *amplia*; yo espero haber logrado encontrar el *justo término medio*.

A mi parecer, *sólo* se puede entender por *continuo* una configuración *perfecta* y *conexa*. Según esto, por ejemplo, un segmento de recta carente de uno o de ambos extremos, así como una superficie circular de la que se excluye su frontera, no son continuos *completos*. Llamo a tales conjuntos de puntos *semicontinuos*.

En general, entiendo por un *semicontinuo* un conjunto de puntos *imperfecto*, *conexo* y perteneciente a la *segunda clase*,[50] constituido de tal forma que todo par de puntos del mismo puede unirse mediante un continuo *completo* que forma parte del conjunto de puntos. Así, por ejemplo, es un *semicontinuo* el espacio que he designado por *A* en el vol. XX, p. 119 de *Math. Annalen*,* que se origina al eliminar de *Gn* cualquier conjunto de puntos de la *primera* potencia.

El *derivado* de un conjunto de puntos conexo es *siempre* un *continuo*, resultando indiferente que el conjunto de puntos conexo tenga la *primera* o la *segunda* potencia.

Si un conjunto de puntos conexo es de la *primera* potencia, entonces no puedo calificarlo *ni* como continuo *ni* como semicontinuo.

Mediante los conceptos que he situado en la cúspide de la teoría de conjuntos, adquiero el compromiso de investigar en todas sus posibilidades la totalidad de las configuraciones de la geometría algebraica así como de la trascendente, y cabe esperar que la generalidad y el rigor de los resultados no sean superados por ningún otro método.

* *Abhandlungen*, 154. [*N. del ed.*]

NOTAS DEL EDITOR A LOS *FUNDAMENTOS PARA UNA TEORÍA GENERAL DE CONJUNTOS**

[1] Los dos últimos artículos son «Sobre una propiedad de la colección de todos los números reales algebraicos» (1874) y «Una contribución a la teoría de variedades» (1878), en *Abhandlungen*, 115-133. Los cuatro primeros números de la serie en la que aparecieron los *Fundamentos* pueden verse en *Abhandlungen*, 139-164. Todos estos trabajos se encuentran además, en reproducción facsímil con la paginación original, en el volumen *Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten*, ed. G. Asser (Leipzig, Teubner, 1984).

[2] La introducción de un punto en el infinito, considerando el plano complejo como una variedad bidimensional cerrada, se debe a Bernhard Riemann (1826-1866) en su obra «Theorie der Abel'schen Funktionen» (*Journal für die reine und angewandte Mathematik* **54**, 1857). Puede verse una traducción al español en *Riemanniana selecta*, ed. J. Ferreirós (Madrid, CSIC, 2000).

[3] El estudio de los órdenes del «devenir infinitas» de las funciones reales —*Infinitärcalcul*— fue obra de Paul du Bois-Reymond (1831-1889), matemático contemporáneo de Cantor y hermano de un famoso fisiólogo, que en 1882 era profesor en la Universidad de Tubinga. Du Bois realizó también contribuciones a la teoría de conjuntos de puntos y se vio envuelto en alguna polémica con Cantor. En el contexto del *Infinitärcalcul* y considerando sucesiones de funciones, Du Bois fue el primero en utilizar, hacia 1873, el método de diagonalización que suele atribuirse a Cantor (véase H. Wang, «The concept of set», en *Philosophy of mathematics*, ed. P. Benacerraf y H. Putnam, Cambridge University Press, 1983, p. 570).

[4] En las presentaciones axiomáticas de los ordinales transfinitos, cada ordinal suele identificarse con el conjunto de sus antecesores. Así, ω_0 representa a la vez el primer número transfinito y la primera «clase numérica» de

* La palabra «anotación» remite siempre a las notas finales de los *Fundamentos*, originales del propio Cantor. Cuando escribimos «nota» es remitiendo a alguna de las presentes notas del editor. Usamos las mismas abreviaturas que en la introducción, véase allí la nota 2 al pie (p. 9).

Cantor: el conjunto de los ordinales finitos; ω_1 representa el primer ordinal no enumerable y la segunda clase numérica: el conjunto de los ordinales enumerables y los finitos; y así sucesivamente.

[5] La palabra «enumeración» se emplea aquí para resolver el difícil problema de traducir el término *Anzahl*, que Cantor emplea en un sentido técnico muy alejado de su significado usual. El lector verá facilitada su tarea de interpretación si tiene en cuenta que por *Anzahl* Cantor entiende el número ordinal (finito o transfinito) de un conjunto bien ordenado. Téngase en cuenta también que, en toda la obra, cuando habla de «números enteros infinitos» Cantor se refiere siempre a los ordinales transfinitos. (Todavía no consideraba las potencias como números cardinales, idea que introducirá en sus *Beiträge* de 1895, y con ella los célebres alefs: $\aleph_0$, $\aleph_1$, ...)

[6] Esta definición, aunque precisa, es prolija y poco elegante. Posteriormente se ha preferido emplear como definición el primer teorema formulado por Cantor en el § 13 —todavía restringido a números de la clase (II)—. Decimos así que un conjunto C está *bien ordenado*, o que se ha establecido un *buen orden* sobre C, si está dado un orden total $<$ sobre C, tal que todo subconjunto S no vacío de C tiene un *menor* elemento: un elemento $r \in S$ tal que $r < s$ para todo $s \in S$ (siendo $r \neq s$).

[7] Esta frase resulta sumamente significativa, ya que en ella Cantor formula el Teorema del Buen Orden, si bien lo considera como un principio lógico o «ley del pensamiento» [Denkgesetz]. Años más tarde intentaría ofrecer una demostración, como sabemos por las cartas a Hilbert y Dedekind: en 1897-1899 planeaba escribir una tercera parte de *Beiträge* dedicada a este asunto. Sin embargo, ese artículo no llegó a publicarse, de modo que el teorema del Buen Orden no volvió a ser mencionado por Cantor después de 1883. Lo planteó nuevamente David Hilbert (1862-1943) en el primero de sus célebres «Mathematische Probleme» de 1900. Ernst Zermelo (1871-1953) ofreció dos demostraciones en 1904 y 1908, sobre la base del Axioma de Elección, con lo que suscitó un intenso debate en torno a la teoría de conjuntos y los métodos abstractos.

[8] Aquí hay que suponer que M y M' son disjuntos, de modo que $M + M'$ denota la unión disjunta.

[9] Cantor emplea aquí una notación distinta de la actual: su $\beta \cdot \alpha$ lo denotamos hoy, en orden inverso, $\alpha \cdot \beta$. Fue Cantor mismo quien propuso este cambio en sus *Beiträge* de 1897, y el motivo del cambio es guardar analogía con la operación suma: igual que $2+\omega = \omega$ (y distinto de $\omega+2$), con la notación posterior $2 \cdot \omega = \omega$ (y distinto de $\omega \cdot 2$). Esto es especialmente importante (véase la carta n° 47) al considerar potencias α^β de números transfinitos.

[10] La proposición a que se refiere no es otra que la Hipótesis del Continuo (véase el § 1 de la introducción y *Abhandlungen*, 132); ni que decir tiene que en esta frase se expresa una esperanza que Cantor no logró cumplir. Tampoco lo han logrado sus sucesores; lo único que sabemos es que la HC es

independiente de los axiomas de Zermelo-Fraenkel (Paul J. Cohen, 1963), aunque compatible con ellos (Kurt Gödel, 1939). Como veremos, la HC aparece de nuevo en otros lugares del trabajo, e incluso se encuentra una generalización suya, presupuesta en la anotación 10.

[11] El teorema que aquí se formula es el que hemos llamado en la presentación «Teorema α», y supuso un paso esencial hacia el Teorema de Cantor-Bendixson. Para comprender el enunciado, es necesario introducir el concepto de *conjunto derivado*, que Cantor había presentado en 1872, en el contexto de su investigación sobre conjuntos de unicidad de series trigonométricas. El conjunto derivado de $P \subseteq \mathbb{R}$, simbolizado por P' o $P^{(1)}$, consta de todos los puntos p que son *puntos de acumulación* de P; es decir, todos los p tales que en todo entorno de p hay infinitos puntos de P. (Un par de ejemplos: el conjunto de los puntos de coordenada $1/n$, para n entero, tiene por derivado el conjunto unitario $\{0\}$; el conjunto de los puntos de coordenada racional sobre la recta tiene por derivado toda la recta real.) En general P' puede tener infinitos elementos —y por tanto tener puntos de acumulación—, de manera que consideraremos iteraciones de esa operación: P'', P''', ...; incluso pueden existir derivados de orden transfinito, $P^{(\omega)}$, $P^{(\omega+1)}$ ..., $P^{(\alpha)}$ ..., definiendo $P^{(\omega)}$ como la intersección de todos los derivados de orden finito. Fue de esta manera como Cantor se encontró por vez primera, hacia 1872, con los «símbolos de infinitud», aunque de momento estos símbolos no tenían ninguna entidad propia: sólo representaban ciertas operaciones que pueden realizarse sobre el *soporte* general de la recta real. Aquellos símbolos fueron presentados al público en la segunda entrega (1880) de «Sobre variedades de puntos...».

[12] El primer volumen de *Acta Mathematica* contenía, en versión francesa, todos los artículos citados en la anterior nota [1] y una versión resumida de los *Grundlagen*. Pero la demostración prometida se encuentra en la sexta entrega de «Sobre variedades de puntos lineales e infinitas»; véase *Abhandlungen*, 220-223. El artículo de Gösta Mittag-Leffler (1846-1927) que Cantor anuncia más abajo apareció en el volumen 4 (1884) de *Acta*, bajo el título «Sur la représentation analytique des fonctions d'une variable indépendante». El teorema de Mittag-Leffler constituía una culminación natural para una importante línea de investigación iniciada por Weierstrass.

[13] La negativa radical a los intentos de desarrollar ideas sobre sistemas numéricos no-arquimedianos (planteados en aquella época por autores como J. Thomae, O. Stolz y P. du Bois-Reymond) es un tema recurrente en cartas y trabajos de Cantor a partir de este momento. El asunto es célebre, porque quien tuvo que luchar contra los prejuicios de sus contemporáneos a fin de introducir los números transfinitos, parece tener prejuicios igualmente infundados (e igualmente comprensibles, quizá) con respecto a los infinitésimos. Zermelo, por ejemplo, escribió que Cantor cometía aquí una *petitio principii* similar a la que reprochaba a los enemigos de los números infinitos:

presuponiendo la continuidad del dominio, demostraba que el axioma de Arquímedes es necesariamente válido (*Abhandlungen*, p. 439). Hacia 1960 Abraham Robinson (1918-1974) pudo definir —empleando métodos de la teoría de modelos— una extensión no-arquimediana del cuerpo de los números reales, en la que se encuentran elementos infinitesimales («cantidades infinitamente pequeñas» bajo la «forma del infinito propio»). Ideas similares fueron propuestas por D. Laugwitz, y sobre esa base se logra construir el *análisis no estándar*.

[14] Se refiere aquí, aunque cuidándose mucho de nombrarlo, a Leopold Kronecker (1823-1891), influyente miembro de la Academia de Berlín a cuyas clases había asistido Cantor, que precisamente en 1883 se convirtió en catedrático de la Universidad. Las opiniones de Kronecker, su negativa a aceptar los métodos abstractos y su propuesta de una reforma radical de la matemática pura —empezando por eliminar los irracionales—, eran muy bien conocidas entre los matemáticos alemanes. Por esta época llevaba ya años criticando el análisis de Weierstrass y otros desarrollos (como los ofrecidos por Cantor) en sus conversaciones privadas, cartas y clases. En prensa sólo había formulado críticas al enfoque del álgebra y de la teoría de números algebraicos característico de Richard Dedekind (1831-1916) y de la matemática moderna. En este § 4, el berlinés sale malparado: su enfoque es tildado de «prosaico y obvio», se le compara con los antiguos escépticos, y se afirma que el desarrollo de la matemática en el siglo XIX hubiera sido imposible de seguir sus recomendaciones. Además, Cantor le reprocha que no intenta formular sus opiniones de manera precisa. Véase también la nota 23 más abajo.

[15] Entre 1886 y 1888, Cantor publicó sendos artículos acerca del infinito —basados en cartas y de carácter filosófico-teológico— en el *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik* [Periódico de filosofía y crítica filosófica], una revista inspirada en J. G. Fichte; resulta característico que eligiera un medio de expresión de filósofos idealistas, y no una revista de corte más kantiano. Esos artículos se publicaron reunidos en el volumen titulado *Zur Lehre vom Transfiniten* [Sobre la teoría del transfinito] (Halle, 1890); ver también las cartas n° 47 y 48, y los *Abhandlungen*, pp. 370-439.

[16] Como queda claro aquí y en lo que sigue, Cantor se siente heredero de las filosofías de Spinoza y Leibniz. Su interés por Baruch Spinoza (1632-1677) surgió en la época de estudiante. Este judío holandés, de ascendencia ibérica, es catalogado como pensador racionalista, y también como panteísta o materialista. Su obra mayor, *Ética demostrada según el orden geométrico* (Madrid, Editora Nacional, 1980), es un tratado cuya estructura axiomática analizó y criticó Cantor en 1867. Spinoza defiende que Dios o Naturaleza es la única substancia y que todos los seres son «modos o afecciones» de los múltiples «atributos» de Dios (dos ejemplos de atributos: el Pensamiento, lo mental, y la Extensión, lo material). En la primera parte de la *Ética* encontramos

la definición: «Por Dios entiendo un ser absolutamente infinito, esto es, una substancia que consta de infinitos atributos, cada uno de los cuales expresa una esencia eterna infinita» (*op. cit.*, 51). Estas ideas resuenan en diversos lugares de los *Fundamentos*.

[17] En efecto, la introducción plena de los números complejos era asunto reciente: hasta el siglo XIX estos «anfibios entre el ser y el no ser» (Leibniz) habían sido tratados como curiosidades matemáticas, o a lo sumo como expedientes heurísticos. Carl F. Gauss (1777-1855) se convenció de su plena validez ya hacia 1799, pero se guardó sus opiniones hasta 1831, cuando empezaban a ser bien conocidas ideas similares de otros autores. En cuanto al análisis de variable compleja, aunque A. L. Cauchy (1789-1857) había ido realizando importantes contribuciones, puede decirse que sólo a partir de 1850 —con Riemann y Weierstrass— se desarrolla en serio.

[18] Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) es el conocido racionalista que inventó el cálculo infinitesimal y habló de una «armonía preestablecida» y de nuestro universo como «el mejor de los mundos posibles». En todos sus campos de trabajo supo obtener gran rendimiento de aplicar el método axiomático, que comprendió mejor que nadie en su época. En su *Monadología* (Madrid, Aguilar, 1968) concibe el mundo como compuesto de mónadas, que son elementos indivisibles en número infinito; no son substancias materiales, sino más bien espirituales: las mónadas son esencialmente activas y su actividad consiste en percibir, apetecer y razonar. Ideas acerca de cómo el universo es infinito en acto, coincidentes con la cita que ofrece Cantor, se encuentran en los §§ 65 y ss. de la *Monadología*.

[19] Los escolásticos llamaban «sincategoremas» a términos como «y» o «no» que no representan ningún objeto, por oposición a los «categoremas». Consideraron el infinito potencial como sincategoremático, lo que implica que no tiene ningún referente real, y a la vez reconocieron un infinito categoremático o actual, que se daría sólo en Dios. La infinitud de los números o de los puntos sobre la recta sería siempre sincategoremática, potencial.

[20] Bernard Bolzano (1781-1848) mostró en sus escritos cómo las «paradojas» del infinito son sólo aparentes, y trató de elaborar una teoría de las colecciones y los conjuntos infinitos (incluyendo una «demostración» de que el reino de las verdades en sí es, de hecho, actualmente infinito). Por desgracia, su obra pionera sólo fue conocida por Cantor y Dedekind cuando ya habían alcanzado y superado sus puntos de vista. Las secciones de su libro a las que remite Cantor tratan de cómo, en su opinión, existe un cálculo preciso con los infinitamente grandes (muy alejado del cálculo transfinito cantoriano) y también con los infinitésimos —introducidos como valores recíprocos de los infinitamente grandes—, y de cómo evitar falsas concepciones al respecto. Véase *Paradoxien des Unendlichen*, ed. F. Prihonsky (Leipzig, Meiner, 1920; orig. 1851) y los comentarios de Hans Hahn en pp. 145-146.

[21] En este principio especulativo e idealista resuenan el panteísmo de Spinoza y también la teodicea de Leibniz. Los conjuntos transfinitos existen en la mente divina, ya que gozan de realidad inmanente, y a la vez en la Naturaleza, ya que —según Leibniz— Dios es omnipotente y tiende a producir todo lo posible, pues desea un mundo perfecto. Razonando con Spinoza diríamos que los transfinitos, puesto que están en el universo del pensamiento, deben darse también en el mundo material, y la razón es que ambos —pensamiento y materia— son «atributos» de Dios o Naturaleza entre los que reina un perfecto paralelismo. Es fácil también conectar con todo esto el célebre *platonismo* matemático de Cantor, que se advierte especialmente en las anotaciones 1 y 2: tenía plena confianza en la realidad de los transfinitos, de todo género y potencia, como entes existentes en ese mundo platónico que es la mente divina. Aquí resuena también la adaptación de ideas de Platón al cristianismo que realizó san Agustín.

[22] Cantor se opone aquí, de nuevo, a las concepciones de Kronecker, ya que éste consideraba la matemática como una ciencia empírica, idea que no era infrecuente en una época dominada por el positivismo. Al hablar de «realidad inmanente» se considera sólo una especie de *existencia intelectual* o *ideal*, uno de cuyos requisitos esenciales —véase el párrafo siguiente— es que los conceptos sean «consistentes en sí mismos». Cantor está pues prefigurando la célebre tesis de Hilbert, según la cual la existencia matemática equivale simplemente a la consistencia del entramado conceptual (sistema axiomático) del que se trate.

[23] En una carta a Mittag-Leffler de noviembre de 1883 escribe Cantor que en los párrafos precedentes (y en § 4) se critican ideas de Kronecker: «Si ha leído usted mi obra *Grundlagen* con atención, encontrará que en las pp. 9, 10, 11 y en las pp. 19 y 20 *juzgo* y *ataco* con *todo rigor* precisamente esas ideas de Kronecker; en la p. 20 y en otro contexto le hago un cumplido, aunque junto a Dedekind (lo que le enfada mucho), pero solamente por concederle un poco de bálsamo para las heridas infringidas en esos lugares.— Al escribirlo, sabía ya que el pequeño sujeto nunca me lo perdonaría y que intrigaría de todas las formas posibles contra mi trabajo; por ello no me sorprende nada lo que oigo acerca de sus [ilegible: ¿maniobras?] contra mí» (*Briefe*, p. 144). El tono de inquina hacia el poderoso Kronecker, que efectivamente era bajito, iría creciendo en los meses siguientes, y más tarde el propio Cantor vería en ello la principal causa de su crisis nerviosa de 1884 (véase la correspondencia de 1884 entre Cantor y Kronecker).

[24] El «renombrado físico» no era otro que Gustav R. Kirchhoff (1824-1887), a la sazón profesor de física teórica en la Universidad de Berlín. En su obra *Vorlesungen über Mechanik* (Leipzig, 1876), Kirchhoff establecía como tarea de la mecánica «describir de la forma más simple y completa los movimientos que acontecen en la naturaleza». Nuevamente encontramos que

Cantor critica un enfoque relacionado con las tendencias positivistas del momento, y defiende una vuelta a la metafísica como instrumento para penetrar en los secretos de la naturaleza.

[25] El propio Karl Weierstrass (1815-1897) expresó muchas reservas sobre esta presentación de sus ideas, la primera publicada: en una carta a Mittag-Leffler dice que su introducción había sido «echada a perder» por Ernst Kossak. Hoy contamos con versiones mucho más fiables, basadas en redacciones manuscritas realizadas por alumnos, que circularon por Alemania en la época: *Einleitung in die Theorie der analytischen Funktionen* (Braunschweig, Vieweg, 1988; redacción de Killing, 1868), *Ausgewählte Kapitel aus der Funktionenlehre* (Leipzig, Teubner, 1988; redacción de Thiéme, 1886). Pero téngase en cuenta que Cantor había conocido esas lecciones de primera mano, en los años 1860.

[26] En la práctica no resulta más inconveniente basar el desarrollo teórico en las cortaduras de Dedekind, que en las sucesiones fundamentales de Cantor. Lo que sí es cierto es que las dos definiciones resultan diferentes a la hora de generalizarlas, ya que Dedekind presupone la existencia de un orden lineal denso, mientras que Cantor se basa en propiedades métricas del conjunto de los racionales. De ahí que el segundo enfoque sea más fructífero en el campo de la topología. Existe una versión castellana de la obra de Dedekind en el volumen *¿Qué son y para qué sirven los números? y otros escritos*, ed. J. Ferreirós (Madrid, Alianza, 1998).

[27] Cantor nunca dio el paso de considerar clases de sucesiones fundamentales equivalentes (en el sentido de la presente definición de «ser igual que»), que es la manera en que hoy se presenta su enfoque. En lugar de ello, considera que para cada sucesión fundamental se «crea» un número b, e indica bajo qué condiciones dos sucesiones corresponden al mismo número.

[28] Esto es una consecuencia simple de que la segunda clase numérica sea no-enumerable. Además, el supremo de una sucesión enumerable y creciente de ordinales de la segunda clase es, a su vez, un ordinal de esta clase.

[29] Esta afirmación puede resultar muy sorprendente, pero es característica de las ideas de Cantor en la década de 1880. Consideraba los números transfinitos como una extensión del conjunto de los números reales, de modo que $\omega > r$, para todo $r \in \mathbb{R}$. Y pensaba que a continuación valía la pena considerar la compleción del conjunto de los ordinales enumerables (II), empleando el método de sucesiones fundamentales; en 1884 y 1885 intentó buscar por esta vía una manera de demostrar la Hipótesis del Continuo.

[30] Esto no es del todo cierto: la primera definición del continuo, correcta y presentada explícitamente como tal, se debe a Dedekind en su obra antes citada (nota [26]). Pero Dedekind sólo define el continuo *lineal*, mientras que Cantor quería tener una definición más general, aplicable a todo subconjunto continuo del espacio n-dimensional. El tema se discute ya en cartas

que ambos se cruzaron en septiembre de 1882, y aquí leemos: «No he tenido éxito con un intento de generalizar su concepto de cortadura y emplearlo para una definición general del continuo. Por el contrario, mi punto de partida en las "sucesiones fundamentales" enumerables pareció acomodarse fácilmente a ello».

[31] Al hablar del tiempo como forma *a priori* de la intuición, se está haciendo referencia a la doctrina kantiana expuesta en *Crítica de la razón pura* (igual que sucede en el párrafo siguiente respecto al espacio). Immanuel Kant (1724-1804) había defendido que espacio y tiempo no tienen realidad exterior, sino que son formas de la sensibilidad del sujeto, a las que debe ajustarse necesariamente todo acto de percepción; sin dar detalles, Kant sugería que la intuición temporal es el origen de la aritmética y concretamente del concepto de número real. Cantor señala que en lugar de servir la intuición del tiempo como fuente de la idea del continuo, la relación es la inversa: el concepto del continuo numérico sirve para clarificar la noción del tiempo, más oscura. Otra referencia filosófica contenida en este párrafo se encuentra al hablar del tiempo como medida del movimiento: parece referirse a la definición de Aristóteles, «el tiempo es el número del movimiento según el antes y el después» (*Física* IV, II, 219 b 2).

[32] He aquí, de nuevo, la Hipótesis del Continuo bajo la forma: el intervalo (0, 1) —o lo que es lo mismo, $\mathbb{R}$— y la clase numérica (II) son equipotentes. Años más tarde, en los *Beiträge* de 1895, Cantor introdujo sus célebres alefs o números cardinales transfinitos para denotar las potencias infinitas: $\aleph_0$ es la potencia de los conjuntos enumerables; $\aleph_1$ la de la segunda clase numérica (II) y conjuntos equipotentes; etc. Si llamamos $\mathfrak{c}$ a la potencia del continuo, con esta notación la HC se expresa bajo la forma simple: $\mathfrak{c} = \aleph_1$.

Lo que no requiere la HC es el resultado de que el conjunto de las funciones analíticas tiene la potencia $\mathfrak{c}$, como también el conjunto de las funciones representables mediante series de Fourier, o el de las funciones continuas. Tampoco es necesaria para demostrar que el conjunto de todas las funciones reales tiene la potencia $2^{\mathfrak{c}}$, y de esto habla la anotación 10.

[33] Encontramos formulado aquí, por vez primera, el Teorema de Cantor-Bendixson, si bien de una forma defectuosa. Es cierto que todo conjunto derivado puede descomponerse: $P' = R \cup S$, donde R y S son disjuntos, S es un conjunto perfecto (por tanto de la potencia del continuo, si no es vacío) y R es finito o enumerable. Pero no es cierto que R sea «reductible», según la definición que se da más abajo. Un alumno de Mittag-Leffler, Ivar Bendixson (1861-1935), localizó el error y dio un contraejemplo en una carta a Cantor y luego en un artículo publicado en *Acta Mathematica* 2 (1883); también advirtió que la propiedad que sí cumple R es que $R \cap R^{(\alpha)} = \varnothing$ para algún ordinal α de la primera o segunda clase. Cantor recogió estos resultados y reconoció la contribución de Bendixson en la sexta y última

entrega de «Sobre variedades de puntos lineales e infinitas» (*Abhandlungen*, 222-224).

[34] El concepto de conjunto «conexo» ha cambiado mucho desde esta primera definición de Cantor, que no es muy satisfactoria intuitivamente, en la medida en que el mismo conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales resulta ser conexo. Las definiciones actuales enlazan con las que propuso Felix Hausdorff (1868-1942) en 1914: un espacio topológico es *conexo* cuando no es representable como unión de dos subconjuntos suyos (no vacíos) disjuntos y abiertos. En cuanto a la definición de «continuo», las que se emplean actualmente en topología también se desvían de la de Cantor, aunque esto no anula ni mucho menos el valor de su intento pionero. Lo habitual hoy es entender por *continuo* un conjunto de puntos C compacto y cerrado de un espacio conexo (y se dice que un conjunto es *compacto* cuando todo subconjunto infinito suyo posee un punto de acumulación en el correspondiente espacio).

[35] Bolzano entendía por «continuo» cualquier conjunto denso (en un espacio ambiente indeterminado): «allí, pero sólo allí, se encontrará un continuo, donde exista una colección de objetos simples (de puntos en el tiempo o en el espacio o también de substancias [mónadas]) que están situados de tal modo que cada uno de ellos tiene al menos un vecino de dicha colección en todo entorno, por pequeño que sea» (*op. cit.* nota [20], 73). Cantor entiende por conjunto *aislado* aquel conjunto de puntos P que no contiene ninguno de sus puntos de acumulación, esto es, tal que $P \cap P' = \varnothing$. Su objeción a Bolzano es que, digamos, el subconjunto de $\mathbb{R}^3$ formado por los puntos cuyas coordenadas son todas racionales (o todas algebraicas) es un «continuo» de Bolzano.

[36] Dedekind localiza la propiedad característica del continuo lineal en que toda cortadura del mismo (A_1, A_2) es «producida» por un elemento c del continuo, en el sentido de que A_1 es el conjunto de todos los $a \leq c$ (o bien $a < c$) y A_2 el conjunto de todos los $a > c$ (o bien $a \geq c$). Cantor tiene razón al decir que todo subconjunto perfecto de $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^n$ satisface esa propiedad considerada aisladamente. Sin embargo, debería advertir al lector de que Dedekind (*op. cit.* nota [26]) presupone que el conjunto en cuestión es ya un cuerpo ordenado denso; con esta precisión, su definición es correcta para el continuo lineal, aunque no admite generalización a espacios n-dimensionales. (Lo curioso es que esta cuestión había sido tratada por ambos con detalle en las cartas del año 1877, y que Cantor se había declarado convencido por las aclaraciones de Dedekind, aunque ahora vuelve sobre la misma crítica.) El propio Cantor, en los *Beiträge* de 1895 y con el fin de caracterizar el continuo *lineal* C, reemplazaba la condición de ser conexo por la existencia de un subconjunto enumerable de C, que sea denso en C (*Abhandlungen*, 310).

[37] El primer principio de generación consiste, pues, en el paso al número siguiente o sucesor; Cantor lo concibe como la «creación» del sucesor.

Es algo peculiar la terminología que emplea, por ejemplo cuando habla de estos principios como «momentos» que intervienen en la generación de los números (la palabra tiene resonancias de la filosofía idealista), o cuando habla de la «posición» [Setzung], esto es, del poner una unidad. Estos rasgos de su lenguaje parecen deberse a la influencia de la filosofía.

[38] Como ya se ha dicho, desde los *Beiträge* del propio Cantor, los productos se escriben en el orden inverso: $\omega \cdot 2$, $\omega \cdot n$.

[39] Este resultado puede obtenerse empleando un método, sugerido por Dedekind, que Cantor utilizó ya en su artículo de 1874 precisamente para demostrar que el conjunto de los números algebraicos es enumerable (*Abhandlungen*, 116). Dado el número $\alpha = \nu_0\omega^\mu + \nu_1\omega^{\mu-1} + \ldots + \nu_{\mu-1}\omega + \nu_\mu$, entendemos por «*altura*» de α el número natural $n = \mu - 1 + \nu_0 + \nu_1 + \ldots + \nu_{\mu-1} + \nu_\mu$. Para cada «altura» sólo puede haber una cantidad finita de ordinales α, así que ordenando los α en función de su altura obtenemos una sucesión infinita simple, de tipo ω, en la que están contenidos todos los números menores que ω^ω.

[40] Quizá este «evidentemente» requiera una aclaración, al no serlo tanto para el lector. De la primera sucesión (α_ν), Cantor obtiene una segunda $(\alpha_{\chi\lambda})$ que es estrictamente creciente; la sucesión (α_ν) es enumerable, de modo que su subsucesión $(\alpha_{\chi\lambda})$ también es enumerable o finita. El paso siguiente es «rellenar» la sucesión $(\alpha_{\chi\lambda})$ con todos los números ordinales de la clase (II) que están entre elementos sucesivos. Esto significa que, para cada elemento $\alpha_{\chi\lambda}$, se añadirá una cantidad enumerable o finita de números ordinales. El total de los elementos añadidos es la unión de una familia enumerable de conjuntos enumerables, y por tanto un conjunto enumerable (la demostración de este resultado es sencilla y puede hacerse del mismo modo que demostramos que los números racionales positivos forman un conjunto enumerable). Por eso es por lo que Cantor afirma que «evidentemente» el conjunto de números ordinales que obtenemos es de la primera potencia.

[41] Los dos teoremas que vienen a continuación son propiedades fundamentales de los conjuntos bien ordenados *O* en general, sea cual sea su cardinalidad. (1) Todo subconjunto no vacío de *O* contiene un (único) menor elemento. (2) Toda sucesión estrictamente descendente de elementos de *O* es finita.

[42] Cantor formula aquí por vez primera el Teorema de Cantor-Bernstein: si dos conjuntos cualesquiera son tales que cada uno es equipotente a un subconjunto del otro, entonces ambos son equipotentes entre sí (a veces llamado de Schröder-Bernstein, si bien la demostración que dio Ernst Schröder en 1896 era incorrecta). Aunque tras la introducción de los ordinales transfinitos Cantor creyó que pronto lograría demostrarlo, resultó no ser así, y en sus *Beiträge* de 1895 llamaba la atención sobre la necesidad de probarlo. La primera demostración satisfactoria fue obtenida por Felix Bernstein (1878-1956) en el seminario de Cantor en Halle (1897), y publicada por Émile Borel en su

famoso libro *Leçons sur la théorie des fonctions* (París, 1898). Dedekind había obtenido una demostración ya en 1887, aunque no la publicó (sobre las circunstancias de este curioso hecho, véase mi libro *Labyrinth of thought*, *op. cit.* en la introducción, 239-241).

[43] El esbozo de las leyes algebraicas válidas para los ordinales transfinitos, contenido en este § 14, resulta a veces insuficientemente justificado, se basa en la intuición. Cantor retomó el asunto en sus *Beiträge* de 1897, empleando una nueva definición de los ordinales (como *tipos de orden* de conjuntos bien ordenados) y ofreciendo un desarrollo mucho más detallado y riguroso.

[44] Literalmente, Cantor escribe: conjunto es «todo Muchos que puede ser pensado como Uno», lo que recuerda el lenguaje de los filósofos griegos. Debe notarse que en esta definición asigna un papel central a la «ley» [Gesetz] que reúne los elementos en un todo: hay que pensar que Cantor todavía no se había distanciado del punto de vista «lógico» o «ingenuo» en teoría de conjuntos (basado en el axioma de comprehensión: toda ley o propiedad bien definida determina un conjunto). También es digna de nota la asociación que establece con ideas de Platón (427-347 a. C.), concretamente con el *Filebo*, uno de los últimos diálogos del filósofo ateniense, donde se habla del placer, el bien y la sabiduría, pero también de la relación entre multiplicidad, unidad y número. La referencia un tanto oscura al *miktón* puede interpretarse así: los conjuntos transfinitos son una «mezcla» o combinación armoniosa entre lo ilimitado (en tanto son infinitos) y lo limitado (en tanto están perfectamente determinados y definidos). Lo Absoluto, en cambio, sería puramente ilimitado, al menos para nuestro entendimiento.

[45] Es llamativo que Cantor sacase enseguida la conclusión de que deben existir potencias tan grandes como $\aleph_\omega$ o $\aleph_\Omega$, y así hasta lo absolutamente infinito. Ciertamente lo sugieren sus dos principios de generación, pero resulta tan vago como el segundo de éstos («paso al límite» transfinito) y todo parece colgar en el vacío. Cabe pensar que aquí, una vez más, le ayudaron su platonismo y sus convicciones teológicas y metafísicas. En cuanto a la última frase de esta anotación, destacar que establece correctamente el requisito de que γ no sea un ordinal límite: sobre la base de la teoría de las «funciones normales», Hausdorff demostró que existen ordinales límite (singulares) γ, tales que $\gamma = \omega_\gamma$, es decir, que γ es el primer ordinal de la clase cuya potencia es $\aleph_\gamma$.

[46] Como vemos, Cantor piensa que la filosofía kantiana es hija del escepticismo y absolutamente incorrecta. En uno de sus artículos filosóficos decía (refiriéndose a las célebres «Antinomias de la razón pura») que «jamás —incluso teniendo en cuenta el escepticismo pirrónico y académico, con el que Kant tiene tantos puntos de contacto— se ha hecho más para desacreditar la razón humana y sus facultades» y que todo se basaba en un empleo vago, acrítico y carente de distinciones del concepto de infinito. A esto respondía su sucesor y editor Ernst Zermelo diciendo que Cantor no hacía de

ningún modo justicia a la doctrina kantiana de las antinomias: «Incluso aquel que, como el editor, *rechace* de raíz la teoría kantiana de la matemática, según la cual todas las proposiciones matemáticas deberían basarse en la "intuición pura", habrá de conceder sin embargo que en esta doctrina de las "antinomias" se expresa una comprensión más profunda, una visión de la naturaleza "dialéctica" del pensamiento humano. Y un peculiar destino dispuso que precisamente las "antinomias de la teoría de conjuntos", cuya analogía al menos *formal* con las kantianas no puede negarse, se interpusieran durante toda una generación a la difusión y el reconocimiento de las contribuciones de Cantor» (*Abhandlungen*, 375 y 377).

[47] Una vez más, igual que en la anotación 6, Cantor reafirma su afinidad con una doctrina específicamente platónica como es la del conocimiento como reminiscencia: todo conocer es recordar, despertar aquello que ya está en nosotros y que hemos visto en la otra vida. Por cierto, conviene añadir que en sus últimos diálogos (*Filebo*, *Timeo*) Platón tiende a ligar matemática y teología, hasta el punto de entender que el intelecto divino está constantemente entregado a la geometría, y que el cuerpo y el alma del Universo están constituidos matemáticamente.

[48] Aquí hay un error en lo que se dice del conjunto de las funciones integrables, porque ya las funciones integrables de Riemann forman un conjunto de mayor potencia. Es notable que, al afirmar que el conjunto de todas las funciones reales (continuas y discontinuas) tiene la potencia $\aleph_2$, Cantor está ya estableciendo una primera *generalización* de la HC; la Hipótesis del Continuo Generalizada afirma que siempre $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$. Pero hay algo quizá más llamativo en el contenido de esta anotación. Lo que Cantor afirma presupone que está en condiciones de demostrar que el conjunto de todas las funciones tiene una potencia mayor que $\mathfrak{c}$, y concretamente la potencia $2^{\mathfrak{c}}$. Para ello, tendría que haber empleado ya el célebre e importantísimo método de diagonalización, que publicó por vez primera en el artículo de 1892. Ver la carta a Hilbert, 11 de octubre de 1897.

[49] He aquí el famoso *conjunto ternario*, también llamado el *discontinuo de Cantor*. Lo que hace es trabajar con los números del intervalo [0, 1] representados en el sistema de base tres, y eliminar todos los puntos cuya expansión ternaria lleve la cifra 1. Para visualizar el resultado, basta pensar que al eliminar el 1 de la primera posición tras la coma, se excluye el intervalo (1/3, 2/3); al eliminarlo de la segunda posición, se excluyen los intervalos (1/9, 2/9) y (7/9, 8/9); y así sucesivamente. Por tanto, al conjunto ternario pertenecen todos los puntos extremos que nos van surgiendo: 0, 1/3, 2/3, 1, 1/9, 2/9, 7/9, 8/9, etc.; si llamamos S al conjunto de esos puntos, el discontinuo de Cantor es precisamente su derivado S'; y resulta que este conjunto no es denso en ninguna parte (es el complemento de un conjunto de abiertos distribuido densamente en [0, 1]). Cantor demostró un año después que puede esta-

blecerse una aplicación biunívoca entre el conjunto ternario y el intervalo [0, 1] completo.

[50] La referencia a la segunda clase presupone, una vez más, que la HC es verdadera. Nótese cómo Cantor vuelve al tema una y otra vez, y siempre con plena convicción de que su hipótesis resultará correcta.

SOBRE UNA CUESTIÓN ELEMENTAL DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS (1892)

En el artículo titulado «Sobre una propiedad de la colección de todos los números reales algebraicos» (*Journ. für Math.* vol. 77, p. 258) se encuentra por primera vez una demostración de la proposición de que hay conjuntos que no se pueden relacionar biunívocamente con la totalidad de los números enteros finitos 1, 2, 3, ..., ν, ...; o, como yo acostumbro a expresarme, que no tienen la potencia de la serie numérica 1, 2, 3, ..., ν,... De lo demostrado en el § 2 se sigue sin más que, por ejemplo, la totalidad de los números reales de un intervalo cualquiera $(\alpha...\beta)$ *no* se puede representar en forma de sucesión:

$$\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\nu, ...$$

Se puede dar, sin embargo, una demostración mucho más simple de ese teorema, que es independiente de la consideración de los números irracionales.

Sean *m* y *w* dos caracteres cualesquiera mutuamente excluyentes, consideremos la colección M de elementos

$$E = (x_1, x_2, ..., x_\nu, ...),$$

que dependen de infinitas coordenadas $x_1, x_2, ..., x_\nu, ...$, donde cada una de estas coordenadas es o *m* o *w*. Sea M la totalidad de los elementos E.

A los elementos de M pertenecen por ejemplo los tres siguientes:

$$E^{I} = (m, m, m, m, ...),$$
$$E^{II} = (w, w, w, w, ...),$$
$$E^{III} = (m, w, m, w, ...).$$

Afirmo ahora que tal conjunto M no tiene la potencia de la sucesión 1, 2, 3, ..., ν, ...

Esto se sigue de la siguiente proposición:

«Si E_1, E_2, ...; E_ν, ... es una sucesión simple cualquiera de elementos del conjunto M, entonces hay siempre un elemento E_0 de M que no coincide con ningún E_ν».

Para demostrarlo, sean

$$E_1 = (a_{1,1}, a_{1,2}, ..., a_{1,\nu}, ...)$$
$$E_2 = (a_{2,1}, a_{2,2}, ..., a_{2,\nu}, ...)$$
$$.....$$
$$E_\mu = (a_{\mu,1}, a_{\mu,2}, ..., a_{\mu,\nu}, ...)$$
$$.....$$

Aquí los $a_{\mu,\nu}$ son de forma determinada o *m* o *w*. Defínase ahora una sucesión b_1, b_2, ..., b_ν, ... de tal modo que b_ν sea igual también sólo a *m* o a *w* y *distinto* de $a_{\nu,\nu}$.

Por consiguiente, si $a_{\nu,\nu} = m$, $b_\nu = w$; y si $a_{\nu,\nu} = w$, entonces $b_\nu = m$.

Consideremos ahora el elemento de M

$$E_0 = (b_1, b_2, b_3, ...)$$

se ve sin más que la igualdad

$$E_0 = E_\mu$$

no puede ser satisfecha por ningún valor numérico entero positivo de μ, ya que de lo contrario sería, para el μ en cuestión y para todo valor numérico entero de ν,

$$b_\nu = a_{\mu,\nu}$$

y también en particular

$$b_\mu = a_{\mu,\mu},$$

lo cual queda excluido por la definición de b_ν. De esta proposición se sigue inmediatamente que no se puede poner la totalidad de los elementos de M en forma de sucesión: E_1, E_2, ..., E_ν, ... ya que de lo contrario nos enfrentaríamos a la contradicción de que una cosa E_0 sería y no sería elemento de M.

Esta demostración resulta digna de atención no sólo por su gran sencillez, sino también particularmente por la razón de que el principio que en ella se sigue se puede extender sin más a la proposición general de que las potencias de conjuntos bien definidos no tienen un máximo, o lo que es lo mismo, que a cualquier conjunto dado L se le puede adjuntar otro M que es de potencia superior a L.

Sea por ejemplo L un continuo lineal, digamos la colección de todas las cantidades numéricas reales que son ≥ 0 y ≤ 1.

Se entenderá por M la colección de todas las funciones [unívocas][1] $f(x)$ que toman sólo los dos valores 0 o 1, mientras que x recorre todos los valores reales que son ≥ 0 y ≤ 1.

Que M *no* tiene una potencia *menor* que L se sigue de que se pueden indicar subconjuntos de M que tienen la misma potencia que L; por ejemplo, el subconjunto que consta de todas las funciones de x que tienen el valor 1 para un único valor x_0 y el valor 0 para todos los demás valores de x.

Pero M *no* tiene tampoco la *misma* potencia que L, ya que de lo contrario el conjunto M se podría poner en relación biunívoca con la variable z, y se podría pensar M en la forma de una función [unívoca] de las dos variables x y z

$$\varphi(x, z),$$

de modo que para cada valor particular de z se obtendrá un elemento $f(x) = \varphi(x, z)$ de M, y también, a la inversa, cada elemento $f(x)$ de M resulta de $\varphi(x, z)$ mediante un único y determinado valor particular de z.

Pero esto conduce a una contradicción, pues si se entiende por $g(x)$ la función unívoca de x que toma sólo los valores 0 o 1 y que es diferente de $\varphi(x, x)$ para todo valor de x, entonces, por una parte, $g(x)$ es un elemento de M; por la otra, $g(x)$ no puede resultar de $\varphi(x, z)$ mediante ningun valor particular $z = z_0$, porque $\varphi(z_0, z_0)$, es distinto de $g(z_0)$.

1. Cantor añade esta palabra porque en su época era habitual aceptar también «funciones» polívocas, o sea, con varios valores $f(a)$ para un mismo argumento a. [*N. del ed.*]

La potencia de M no es por tanto ni menor ni igual a la de L, se sigue así que es mayor que la potencia de L (*cf. Journal de Crelle*, vol. 84, p. 248).

En los «Fundamentos para una teoría general de conjuntos» (Leipzig 1883; *Math. Ann.*, vol. 21) demostré ya por medios muy distintos que las potencias no tienen un máximo; incluso se probó allí que la colección de todas las potencias, si las imaginamos ordenadas conforme a su tamaño, forman un «conjunto bien ordenado», de modo que para cada potencia hay en la naturaleza una inmediatamente mayor, pero también a cada conjunto creciente y sin fin de potencias les sigue una inmediatamente mayor.

Las «potencias» representan la única y necesaria generalización de los «números cardinales» finitos, no son otra cosa que los números cardinales infinitamente grandes actuales, y les corresponde la misma realidad y determinación que a aquellos; sólo que las relaciones formales entre ellas, la «teoría de los números» relativa a ellas, es en parte distinta que en el dominio de lo finito.

La exploración ulterior de este campo es tarea del futuro.

CORRESPONDENCIA DE CANTOR CON DEDEKIND, HILBERT Y OTROS

ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

518

BRIEFWECHSEL

CANTOR-DEDEKIND

HERAUSGEGEBEN VON

† E. NOETHER UND J. CAVAILLÈS

Göttingen Paris

PARIS

HERMANN & Cie, ÉDITEURS

Portada de la edición 1937 de la correspondencia Cantor-Dedekind, editada por la alemana E. Noether y el francés J. Cavaillès.

CORRESPONDENCIA CON RICHARD DEDEKIND (1872-1874)

1. CANTOR A DEDEKIND:

Halle a/S., 28 abril 1872

Le manifiesto mis más cumplidas gracias por el amable envío de su tratado sobre continuidad y números irracionales. Según he podido ya convencerme, la concepción del tema que yo mismo me formé hace unos años, partiendo de trabajos sobre aritmética, coincide en contenidos con la suya; sólo se encuentra una diferencia en la *introducción conceptual* de las magnitudes numéricas. Respecto a que la esencia de la continuidad consiste en lo que Ud. ha resaltado como tal, no puedo sino aprobarlo con convicción.

2. CANTOR A DEDEKIND:

Halle, 17 julio 1873

...Nuestro encuentro casual en Gersau [Suiza, cantón de Schwytz] fue para mí tanto más valioso, cuanto que me permitió conocer a un representante especialmente distinguido de nuestra ciencia matemática. ...

Le deseo que disfrute de la tranquilidad necesaria para desarrollar la exposición detallada de su teoría de las irracionalidades algebraicas en el caso del cubo [se refiere al estudio de las clases de ideales en cuerpos cúbicos], que propone Ud. en una recensión de la obra de Bachmann sobre la ciclotomía.[1]

1. Véase la reseña de P. Bachmann, *Die Lehre von der Kreisteilung und ihre Beziehungen zur Zahlentheorie*, en Dedekind, *Werke*, tomo III (1932), 408-419. Éste respondía en carta del 23 de julio mencionando una errata en la reseña y añadiendo: «quiero hacerle notar que por largo tiempo no he podido superar todos los escollos y dificultades que se oponen a la determinación del

El requisito que fue establecido por vez primera, si no me equivoco, por Ud. y por mí, de incluir en el concepto geométrico de la línea recta (y con ello, naturalmente, en el de toda variedad geométrica continua) un determinado axioma que caracterizamos de manera completa y unívoca, ha sido adoptado recientemente por un geómetra (F. Klein), si bien al modo un tanto escurridizo de la nueva geometría (*Math. Annalen*, tomo VI, 2ª entrega). Me parece muy probable que ambos, por más que no se nos mencione, seamos los causantes inocentes de esta toma de posición.

Con el ruego de que continúe honrándome también en el futuro con su consideración amistosa, quedo siempre con la más alta estima

Suyo humildemente

G. CANTOR

3. CANTOR A DEDEKIND:

Halle, 29 nov. 73

Permítame[2] plantearle un problema que tiene para mí cierto interés teórico, pero que no alcanzo a resolver; quizá pueda Ud., y sea tan amable de escribirme al respecto. Se trata de lo siguiente.

Tomemos la colección de todos los individuos enteros positivos n y designémosla por (n); además pensemos en la colección de todas las magnitudes reales positivas x y designémosla por (x); la cuestión es simplemente, ¿resulta posible coordinar (n) con (x) de tal modo que a cada individuo de una colección le corresponda uno y sólo uno de la otra? A primera vista uno se dice a sí mismo, no, no es posible, ya que (n) consta de partes discretas mientras que (x) forma un continuo; mas con esta objeción nada se gana, y por más que me inclino a la opinión de

número de clases de ideales, en el caso general de cuerpos cúbicos arbitrarios; pero espero que lo lograré cuando vuelva a tener tiempo para ello». La teoría sólo fue publicada en 1900 (Dedekind, *Werke*, tomo II [1931], 148-233). [*N. del ed.*]

2. Respecto a las cartas del 29.11.1873 al 27.12.1873, véanse los comentarios de Dedekind en p. 5, que obviamente fueron escritos con posterioridad. [*Nota de Noether y Cavaillès.*]

que (n) y (x) no admiten ninguna coordinación unívoca, no logro encontrar la razón tal como se pretende, pero quizá sea muy simple.

¿No nos inclinaríamos también, a primera vista, a afirmar que (n) no puede ser coordinado unívocamente con la colección (p/q) de todos los números racionales positivos p/q? Y sin embargo no resulta difícil mostrar que (n) puede coordinarse unívocamente no sólo con aquella colección, sino también con la más general

$$(a_{n_1, n_2, \ldots n_\nu})$$

donde $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$ son una cantidad cualquiera ν de índices enteros positivos tan grandes como se quiera.

4. CANTOR A DEDEKIND:

Halle, 2 diciembre 73

Hoy me ha reportado una alegría muy singular recibir su respuesta a mi última carta. Le planteé mi pregunta por la razón de que ya hace años que me la hice como tal, pero siempre me he encontrado en la duda de si la dificultad que me presentaba era subjetiva, o si más bien estaba en el asunto. Puesto que Ud. me responde que tampoco Ud. está en situación de responderla, puedo suponer lo segundo. Me gustaría añadir que nunca me he ocupado en serio del tema, dado que no tiene ningún interés práctico especial para mí, de modo que me adhiero plenamente a Ud. cuando dice que por dicho motivo no merece grandes esfuerzos. Mas resultaría hermoso que se pudiera responder; por ejemplo, suponiendo que la respuesta fuera *no*, con ello se habría dado una nueva demostración del teorema de Liouville sobre la existencia de números trascendentes.

La demostración que da Ud. de que (n) puede coordinarse unívocamente con el cuerpo de todos los números algebraicos, es más o menos la misma con la que corroboro mi afirmación de la última carta. Tomo $n_1^2 + n_2^2 + \ldots n_\nu^2 = N$ y ordeno según ello los elementos.

¿No es de por sí bueno y cómodo que, tal como Ud. ha enfatizado, se pueda hablar del enésimo número algebraico, de manera que cada uno aparezca solo una vez en la sucesión?

Tal como Ud. señala muy adecuadamente, nuestro problema admite la siguiente formulación: «¿puede (n) ser coordinado unívocamente con una colección

$$(a_{n_1, n_2, \ldots})$$

donde $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$ son una cantidad infinita de índices enteros positivos tan grandes como se quiera?».

5. CANTOR A DEDEKIND:

Halle, 7 diciembre 73

En los últimos días he tenido el tiempo para perseguir con algo más de persistencia la conjetura que discutí con Ud.; sólo hoy creo haber acabado con el tema; pero si me equivocara, seguro que no encontraría ningún juez más indulgente que Ud. Me tomo pues la libertad de someter a su juicio lo que acabo de poner sobre el papel en la forma incompleta de un primer esbozo.

Supongamos que se pudieran poner todos los números positivos $\omega < 1$ en la sucesión:

(I) $$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n, \ldots$$

Sea ω_α el miembro inmediatamente más grande que sigue a ω_1, y sea ω_β el siguiente que es inmediatamente más grande, y así sucesivamente. Pongamos: $\omega_1 = \omega_1^1$, $\omega_\alpha = \omega_1^2$, $\omega_\beta = \omega_1^3$ y así sucesivamente, y extraigamos de (I) la sucesión infinita:

$$\omega_1^1, \omega_1^2, \omega_1^3, \ldots, \omega_1^n, \ldots$$

En lo que resta de aquella sucesión, denotemos el primer miembro por ω_2^1, el siguiente más grande ω_2^2, etc., y extraigamos la segunda sucesión:

$$\omega_2^1, \omega_2^2, \omega_2^3, \ldots, \omega_2^n, \ldots$$

Si se continúa con esta forma de pensar, reconocemos que la sucesión (I) puede ser descompuesta en las infinitas sucesiones:

(1) $$\omega_1^1, \omega_1^2, \omega_1^3, \ldots, \omega_1^n, \ldots$$
(2) $$\omega_2^1, \omega_2^2, \omega_2^3, \ldots, \omega_2^n, \ldots$$
(3) $$\omega_3^1, \omega_3^2, \omega_3^3, \ldots, \omega_3^n, \ldots$$

Mas en cada una de ellas, los miembros crecen siempre de izquierda a derecha; tenemos que:

$$\omega_k^{\lambda} < \omega_k^{\lambda+1}.$$

Ahora tómese un intervalo $(p...q)$ de manera que ningún miembro de (1) caiga en él; esto es, por ejemplo dentro de $(\omega_1^1...\omega_1^2)$. Ahora podría suceder que todos los miembros de la segunda sucesión, o de la tercera, cayeran fuera de $(p...q)$; pero en algún momento debe llegar una sucesión en la que no todos los miembros caen fuera de $(p...q)$, digamos la k-ésima; (ya que en otro caso, los números que están dentro de $(p...q)$ no estarían contenidos en (I), contra el supuesto). Entonces podemos fijar un intervalo $(p'...q')$ dentro de $(p...q)$, de manera que todos los miembros de la k-ésima sucesión caigan fuera del mismo; es evidente que entonces $(p'...q')$ se comporta del mismo modo en relación a todas las sucesiones anteriores; mas en el desarrollo ulterior debe aparecer una sucesión k'-ésima, cuyos miembros no estén todos fuera de $(p'...q')$, y entonces tomemos dentro de $(p'...q')$ un tercer intervalo $(p''...q'')$, de manera que todos los miembros de la sucesión k'-ésima caigan fuera de él.

Vemos así que es posible formar una sucesión infinita de intervalos:

$$(p...q), (p'...q'), (p''...q'''), ...$$

cada uno de los cuales comprende a los siguientes, y que se comportan respecto a nuestras sucesiones (1), (2), (3), ... como sigue:

Los miembros de la sucesión primera, segunda, ... k–1-ésima caen fuera de $(p...q)$.
" " " k-ésima, ... k'–1-ésima " " $(p'...q')$.
" " " k'-ésima, ... k''–1-ésima " " $(p''...q'')$.

Ahora se puede siempre pensar *al menos* un número, que llamaré η, que cae en el interior de cada uno de los intervalos; de este número η, que obviamente es $\geqslant_1^0$, se ve enseguida que no puede estar contenido en ninguna de nuestras sucesiones (1), (2), (3), ... Y así, partiendo del supuesto de que todos los números $\geqslant_1^0$ estén contenidos en (I), se llegaría al resultado

opuesto de que un cierto número $\eta \gtrless_1^0$ *no* se encuentra bajo (I); por consiguiente, la hipótesis era incorrecta.

De este modo creo haber llegado por fin a la razón de por qué la colección que en mi carta anterior designé con (*x*) *no* se puede coordinar unívocamente con la designada por (*n*).

6. CANTOR A DEDEKIND:

Halle, 9 diciembre 73

He encontrado ya una demostración simplificada para el teorema recién demostrado, en la cual no resulta necesaria la descomposición de la sucesión (I) en (1), (2), (3), ...

Muestro directamente que, si parto de una sucesión

(I) $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n, \ldots,$

en *todo* intervalo dado $(\alpha...\beta)$ puedo determinar un número η que no está contenido en (I). De ahí se deduce sin más que la colec. (*x*) no puede ser coordinada unívocamente con la colección (*n*), y de ello deduzco que entre las colecciones y conjuntos [Mengen] de valores existen diferencias esenciales, que hasta hace poco no había podido advertir.

Le pido ahora mil disculpas por haber requerido tanto de su tiempo con esta cuestión.[3]

7. CANTOR A DEDEKIND:

Halle, 10 diciembre 73

Acusando recibo de sus amistosas líneas del 8 del presente, le pido con determinación que tenga en cuenta que nada podría alegrarme más que el interés, que he sido tan afortunado de estimular en Ud. para ciertos problemas del análisis. Permítame añadir que nada podría estimularme más que esto para em-

3. El lector observará que Cantor pide a menudo excusas por robar el tiempo de su colega. Esto tiene una explicación muy concreta: en 1872 y hasta 1875 Dedekind se convirtió en el primer director electo del *Collegium Carolinum* de Brunswick, que bajo su dirección realizó las gestiones para convertirse en Escuela Técnica [Herzoglich Technische Hochschule], construyéndose además un edificio nuevo. De ahí su gran carga de trabajo en estos años. [*N. del ed.*]

prender nuevos esfuerzos, por lo cual debo pedirle que también en el futuro me permita solicitarle sus comentarios. ¿No se desprenderá algo bueno para su teoría de los números algebraicos a partir de la sinopsis bajo la forma $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n, ...$?[4]

... Las vacaciones navideñas las pasaré, como es habitual, con mis familiares en Berlín.

Con los mejores deseos,

Suyo humildemente

G. CANTOR

8. CANTOR A DEDEKIND:

Berlín, 25 diciembre 73

Aunque inicialmente no pretendía publicar el tema que he discutido por vez primera con Ud. hace poco, de modo imprevisto me han animado a ello. Comuniqué mis resultados al señor Weierstrass el día 22; mas no hubo tiempo suficiente para entrar en ello con más precisión. El día 23 tuve la gran alegría de recibir una visita suya, durante la cual pude exponerle las demostraciones; fue de la opinión de que debería publicar el asunto, en la medida en que tiene que ver con los números algebraicos. Tras ello escribí un pequeño tratado bajo el título: *Sobre una propiedad de la colección de todos los números reales algebraicos*, y lo envié al señor profesor Borchardt para consideración del *Journal f[ür die reine und angewandte] Math[ematik]*.

Al hacerlo, me pareció adecuado adoptar, como Ud. verá en el futuro, sus comentarios y sus expresiones, tan valiosas para mí. De ahí que me haya permitido comunicarle lo anterior.

4. De hecho Dedekind aplicó el teorema en su trabajo [de 1901] *Ueber die Permutationen* [=automorfismos] *des Körpers aller algebraischen Zahlen* (*Obras completas*, tomo II, p. 278); mientras que para cuerpos finitos de números algebraicos [extensiones finitas de $\mathbb{Q}$] la existencia de una base finita hace dispensable el buen orden. [*Nota de Noether y Cavaillès.*] En dicho lugar, Dedekind remite en nota al artículo de Cantor y se limita a afirmar, con mucha elegancia, que «también él» había establecido ese teorema por aquella época [hatte ich ebenfalls gefunden...]. [*N. del ed.*]

9. CANTOR A DEDEKIND:

Berlín, 27 diciembre 73

A lo largo de la correspondencia que hemos cultivado en los últimos tiempos se me ha hecho tan natural escribirle, que tengo en manos mis respuestas sin mucha reflexión, y casi olvido pedirle disculpas por la frecuencia de las mismas; quizá la razón de ello se encuentre en la similitud de nuestros intereses, y en que a ambos nos preocupa en igual medida el desarrollo de la ciencia para el bien común.

La limitación que he dado a mis investigaciones, para su publicación, se fundamenta en parte en las circunstancias que aquí rigen, de las cuales quizá le informe oralmente algún día en el futuro, y en parte en que he creído que convenía primero aplicar mis ideas en un único caso (como es el de los números reales algebr.). Las extensiones de las mismas, respecto a las que puedo ya advertir un montón [Menge] de posibilidades, no deberían luego exigir demasiado esfuerzo, y no resultará esencial si las doy yo mismo o algún otro. Por ello he redactado, tras una corta introducción, dos secciones; en la primera se muestra que la colección de los números reales algebraicos puede ser coordinada unívocamente con la colección de los números enteros positivos, en la segunda que, dada una sucesión ω_1, ω_2, ..., ω_n, ..., se pueden definir en todo intervalo números η que no están contenidos en ella.

Según me ha comunicado el señor Borchardt hoy mismo, va a ser tan amable de incluir este trabajo próximamente en el *Journal*.

Habría incluido de buen gusto el comentario sobre la distinción esencial de las colecciones, pero lo omití siguiendo el consejo del señor Weierstrass; sin embargo, más tarde, al corregir las pruebas, pude incluirlo de nuevo como anotación adicional.

...Con los mejores deseos de mi hermana, ... quedo humildemente suyo

G. CANTOR

10. APUNTES DE DEDEKIND SOBRE LAS CARTAS DE 1873:

29.11.1873

El señor G. Cantor (Halle) me plantea el problema de si la colección (n) de todos los individuos enteros positivos n (números naturales) admite ser coordinada con la colección (x) de todos las magnitudes reales positivas x, de modo que a cada individuo de una colección le corresponda uno y sólo uno de la otra. Termina con las palabras: «¿No nos inclinaríamos también, a primera vista, a afirmar que (n) no puede ser coordinado unívocamente con la colección (p/q) de todos los números racionales positivos p/q? Y sin embargo no resulta difícil mostrar que (n) puede coordinarse unívocamente no sólo con aquella colección, sino también con la más general

$$(a_{n_1, n_2, \ldots n_\nu})$$

donde n_1, n_2, ..., n_ν son una cantidad cualquiera ν de índices enteros positivos tan grandes como se quiera».

A esto respondí inmediatamente que no podía decidir la primera cuestión, pero a la vez formulé y demostré completamente el teorema de que incluso la colección de todos los números algebraicos puede ser coordinada con la colección (n) de los números naturales bajo la forma indicada. (Este teorema y su demostración pasaron poco después casi literalmente, incluso empleando el término técnico *altura*, al tratado de Cantor publicado en [el *Journal* de] *Crelle* tomo 77, con la única desviación, mantenida contra mi consejo, de que solamente se considera la colección de todos los números algebraicos *reales*.) Sin embargo, la opinión que yo había expresado de que la primera cuestión no merecía mucho esfuerzos, ya que no tenía ningún interés práctico especial, fue contradicha contundentemente por la demostración, ofrecida por Cantor, de la existencia de números trascendentes (*Crelle* tomo 77).

2.12.1873

C. indica la importancia del primer problema, pues en caso de ser negado es posible demostrar la existencia de números trascendentes (Liouville) de un modo nuevo. Continúa: «La demostración que da Ud. de que (n) puede coordinarse unívo-

camente con el cuerpo de todos los números algebraicos, es más o menos la misma con la que corroboro mi afirmación de la última carta. Tomo

$$n_1^2 + n_2^2 + \ldots n_\nu^2 = N$$

y ordeno según ello los elementos. ¿No es de por sí bueno y cómodo que, como Ud. ha resaltado adecuadamente [bezeichnend], se pueda hablar del enésimo número algebraico, de manera que cada uno aparezca sólo una vez en la sucesión? Tal como Ud. señala muy adecuadamente, nuestro problema admite la siguiente formulación: "¿puede (n) ser coordinado unívocamente con una colección

$$(a_{n_1, n_2, \ldots})$$

donde n_1, n_2, ..., n_ν son una cantidad infinita de índices enteros positivos tan grandes como se quiera?"».

7.12.1873

C. me comunica una demostración rigurosa, encontrada el mismo día, del teorema: la colección de todos los números positivos $\omega < 1$ *no* puede ser coordinada unívocamente con la colección (n).

A esta carta, recibida el día 8 de diciembre, respondo en el mismo día congratulándome del hermoso éxito, a la vez que doy un «reflejo especular» muy simplificado del núcleo de la demostración (que era todavía bien compleja); de nuevo, esta exposición pasó casi literalmente al artículo de Cantor (*Crelle* tomo 77), ¡si bien el giro que yo había empleado, «de acuerdo con el principio de continuidad», fue evitado en el lugar correspondiente! (p. 261, líneas 10-14).[5]

5. La mención del principio de continuidad hubiera constituido una referencia implícita al artículo de Dedekind *Continuidad y números irracionales* (1872). Aparecía en la carta porque, en su versión simplificada, Dedekind demuestra el principio (Bolzano-Weierstrass) de los intervalos encajados, en que se apoya Cantor, sobre la base de su propio principio de continuidad (cortaduras). [*N. del ed.*]

9.12.1873

C. me escribe apresuradamente que ha encontrado una demostración simplificada del teorema. Dado que no menciona mi carta, ésta debería haber llegado más tarde.

10.12.1873

C. acusa recibo de mi carta del 8 de diciembre, sin mencionar la exposición simplificada de la demostración que se contenía en ella, y agradece mi interés por el asunto.

25.12.1873

C. escribe (desde Berlín) diciendo que ha redactado (animado por Weierstrass) un pequeño artículo con el título: *Sobre una propiedad de la colección de todos los números reales algebraicos.* «Al hacerlo, me pareció adecuado adoptar, como Ud. verá en el futuro, sus comentarios y sus expresiones, tan valiosas para mí.»

Respondo a vuelta de correo aconsejándole que suprima la limitación al cuerpo de los números *reales* algebraicos.

27.12.1873

C. escribe (desde Berlín): «La limitación que he dado a mis investigaciones, para su publicación, se fundamenta en parte en las circunstancias que aquí rigen, de las cuales quizá le informe oralmente algún día en el futuro, y en parte en que he creído que convenía primero aplicar mis ideas en un único caso (como es el de los números reales algebraicos)».

Nunca he recibido explicaciones acerca de las «circunstancias de Berlín»; tampoco hemos discutido nunca, con posterioridad, acerca del artículo (*Crelle* tomo 77).

11. CANTOR A DEDEKIND:

Halle, 5 enero 74

¡Muy estimado señor Profesor!

Al regresar aquí ayer por la tarde, encontré la conferencia del señor Klein que había mencionado Ud. y hoy la he leído.[6]

6. La referencia es a F. Klein, *Über den allgemeinen Funktionsbegriff und dessen Darstellung durch eine willkürliche Kurve* (1873), reimpreso en *Math.*

En coincidencia con sus comentarios, no puedo encontrar en ella ningún aspecto favorable; nada llega a ofrecer de importancia, todo sugiere que el autor aún no ha alcanzado los problemas nucleares del análisis aritmético, y que incluso en el campo de la geometría, que hasta ahora ha cultivado, tiene perspectivas sumamente inseguras. Tanto más deplorable me resulta que se nos presente con el tono de quien habría conocido todas las dificultades por experiencia propia y habría logrado superarlas.

Si mereciera la pena, se podría mostrar allí un error tras otro; quizá él mismo llegue a descubrirlos.

En lo tocante a los problemas con los que me he ocupado en los últimos tiempos, se me ocurre que siguiendo la misma línea de pensamiento se nos plantea lo siguiente:

¿Es posible hacer corresponder unívocamente una superficie (digamos un cuadrado incluyendo su frontera) con una línea (digamos un segmento de recta incluyendo sus puntos extremos), de manera unívoca tal que a cada punto de la superficie le corresponda un punto de la línea, e inversamente a cada punto de la línea un punto de la superficie?

En este momento tengo la impresión de que la respuesta a esta pregunta —si bien uno se ve aquí tan inclinado al *no*, que podría parecerle casi superflua la demostración— ofrece graves dificultades.

12. CANTOR A DEDEKIND:

Halle, 28 enero 74

En los *Comptes rendus* del año pasado encuentro un tratado de Hermite donde, manipulando el análisis con suma habilidad, se trata un desarrollo simultáneo de n magnitudes exponenciales e^{ax}, e^{bx}, ..., e^{hx}, y lo que parece más importante, en ello fundamenta una demostración plenamente segura de la trascendencia del número e. Hermite confiesa haberse ocupado intensamente de la trascendencia del número π, mas respecto a este número se resigna a comentar que le alegraría mucho que algún otro lo lograse.

Annalen (1883); véase Klein, *Abhandlungen*, tomo II (Berlín, Springer, 1922), 214-224. [*N. del ed.*]

13. CANTOR A DEDEKIND:

Halle, 8 marzo 74

He recibido con agradecimiento su amable carta del 30 de enero y, aunque a día de hoy apenas tengo nada interesante que comunicarle, no quisiera suscitar la impresión de que he dejado desatendida su invitación a continuar escribiéndole. Habiendo terminado hoy mis lecciones, pienso desplazarme a Berlín al día siguiente; nunca he permanecido aquí mucho tiempo en las vacaciones, pues lo único que me une en cierto modo a Halle desde hace cinco años es la profesión universitaria que un día abracé.[7]

14. CANTOR A DEDEKIND:

Halle, 18 mayo 74

La necesidad de desahogarme con Ud. en cuestiones científicas y de permanecer cerca de Ud. a nivel personal, hace que surja en mí el deseo de visitarle quizá este verano en Brunswick.

Si podré llevar a cabo este deseo, resulta aún dudoso, ya que el plan es de momento totalmente indeterminado; sería posible siempre que partiera de aquí un sábado y me encontrara con Ud. el sábado siguiente; mas todo depende también de si resultaría de su agrado recibir mi visita este verano. Por Pentecostés no será posible, ya que entonces estaré en Berlín con mi prometida; mas después de Pentecostés quizá lo fuera.

En caso de que quisiera responderme acerca de ello, me gustaría tener noticias de si encuentra Ud. la misma dificultad que yo respecto a la cuestión que le comuniqué en enero, sobre la coordinación de una superficie y una línea, o si con ello me he entregado a una ilusión. En Berlín un amigo mío, al que había

7. Desde Berlín envía otra carta el 16 de abril, que debió quedar sin respuesta, como quizá también la anterior, y sin duda la siguiente. Cantor y Dedekind se encontraron el verano de 1874 en Interlaken, pero todo apunta a que la entrevista fue tensa (véase la carta del 10.10.1876, en *op. cit.*, 229, que confirma una laguna de dos años sin comunicación, pero también constata que Dedekind ha enviado dos trabajos suyos). [*N. del ed.*]

expuesto la misma dificultad, la declaró en cierto modo absurda, ya que se entiende de suyo que dos variables independientes no pueden ser reducidas a una.

...Saludos de corazón,

suyo humildemente

G. CANTOR

SOBRE UNA PROPIEDAD DE LA COLECCIÓN DE TODOS LOS NÚMEROS REALES ALGEBRAICOS (1874)

Se entiende por número real algebraico, en general, una cantidad real ω que satisface una ecuación no idéntica de la forma:

$$a_0\omega^n + a_1\omega^{n-1} + \ldots + a_n = 0, \qquad (1)$$

donde n, a_0, a_1, ... a_n, son números enteros; podemos aquí considerar los números n y a_0 como positivos, suponer que los coeficientes a_0, a_1, ... a_n no tienen divisores comunes, y que la ecuación (1) es irreductible. Bajo estas estipulaciones se logrará, de acuerdo con conocidas proposiciones básicas de la aritmética y el álgebra, que la ecuación (1) sea única para cada número real algebraico; inversamente, es bien sabido que a cada ecuación de la forma (1) le corresponden a lo sumo tantos números reales algebraicos ω que la satisfacen, como indica su grado n. Los números reales algebraicos en su totalidad forman una colección de cantidades que designaremos con (ω). Dicha colección tiene, según resulta de consideraciones simples, la propiedad de que en las proximidades de cualquier número α que consideremos yacen infinitos números de (ω). Tanto más llamativo deberá resultar, a primera vista, la consideración de que es posible coordinar unívocamente con la colección (ω) la colección de todos los números enteros positivos ν, que designaremos con el símbolo (ν), de tal manera que a cada número algebraico ω le corresponda un cierto entero positivo ν, e inversamente a cada número entero positivo ν le corresponda un número real algebraico ω plenamente determinado; de tal manera que, por decirlo con otras palabras, la colección (ω) puede pensarse dada bajo la forma de una sucesión infinita determinada por una ley

$$\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\nu, \ldots \qquad (2)$$

en la que aparecen todos los individuos de (ω), y cada uno de ellos se encuentra en una cierta posición de (2) que viene indicada por el correspondiente índice. Tan pronto como se haya encontrado una ley según la cual quepa pensar que está dada dicha coordinación, resultará posible modificarla a voluntad; bastará pues que comunique en el § 1 aquel modo de organización que, según creo, trae consigo menos complicaciones.

A fin de ofrecer una aplicación de esta propiedad de la colección de todos los números reales algebraicos, añadiré al § 1 otro § 2, en el cual mostraré que, dada una sucesión cualquiera de cantidades reales de la forma (2), resulta posible determinar en todo intervalo prescrito $(\alpha...\beta)$ números η, que *no* están contenidos en (2). Si se combina el contenido de ambos parágrafos, se obtiene una nueva demostración del teorema demostrado primeramente por Liouville, que en todo intervalo prescrito $(\alpha...\beta)$ existen infinitos números reales *trascendentes*, esto es, que no son algebraicos. Además, el teorema del § 2 se nos muestra como la razón por la cual las colecciones de cantidades reales que constituyen lo que se llama un continuo (digamos, todos los números reales que son ≥ 0 y ≤ 1) no se pueden relacionar unívocamente con la colección (ν). Y de este modo he encontrado la clara distinción entre el llamado continuo y una colección del tipo de la totalidad de los números reales algebraicos.

§ 1.

Si volvemos a la ecuación (1) que satisface un número algebraico ω, y que según las estipulaciones anteriores está totalmente determinada, podemos llamar *altura* del número ω a la suma de los valores absolutos de sus coeficientes, más el número $n-1$, donde n indica el grado de ω, designando a dicho valor con N; así pues, empleando un simbolismo que se ha hecho habitual:

$$N = n-1 + |a_0| + |a_1| + ... + |a_n|. \qquad (3)$$

La altura N es pues, para todo número real algebraico ω, un cierto entero positivo; inversamente, para cada valor entero positivo de N hay sólo una cantidad finita de números reales alge-

braicos de altura N; llamemos $\varphi(N)$ a dicho número, de modo que por ejemplo $\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 2$, $\varphi(3) = 4$. Entonces es posible ordenar los números de la colección (ω), a saber, todos los números reales algebraicos, de la siguiente manera: tómese como primer número ω_1 el número que tiene altura $N = 1$; hágase seguir por los $\varphi(2) = 2$ números reales algebraicos cuya altura es $N = 2$, en orden de magnitud creciente, y denótense por ω_2, ω_3; sitúense a continuación los $\varphi(3) = 4$ números cuya altura es $N = 3$, en orden de magnitud creciente. En general, una vez que se hayan enumerado de este modo, y situado en un lugar determinado, a todos los números de (ω) hasta una cierta altura $N = N_1$, se les pueden adjuntar los números reales algebraicos cuya altura es $N = N_1 + 1$, siempre en orden de magnitud creciente; y así se habrá obtenido toda la colección (ω) de los números reales algebraicos bajo la forma:

$$\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\nu, \ldots$$

resultando posible hablar, por relación a este ordenamiento, del n-ésimo número real algebraico, sin que se haya olvidado ni uno sólo de la colección (ω).

§ 2.

Estando dada, según una ley cualquiera, una sucesión infinita de cantidades reales distintas entre sí

$$\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\nu, \ldots, \tag{4}$$

es posible determinar en todo intervalo prescrito $(\alpha...\beta)$ un número η (y por lo tanto, infinitos números) que no consta en la sucesión (4); esto es lo que hemos de demostrar.

Con ese fin, partimos del intervalo $(\alpha...\beta)$, que se nos habrá prescrito a voluntad, y sea $\alpha < \beta$; denótense por α', β' los dos primeros números de nuestra sucesión (4) que caen dentro del intervalo (excluyendo sus extremos), y sea $\alpha' < \beta'$; del mismo modo, denótense por α'', β'' los dos primeros números de nuestra sucesión que caen dentro del intervalo $(\alpha'...\beta')$, y sea $\alpha'' < \beta''$; y de acuerdo con esta misma ley, constrúyase a continuación un intervalo $(\alpha'''...\beta''')$, y así sucesivamente. Así pues, por defi-

nición, α', α'', ... son números bien determinados de nuestra sucesión (4), cuyos índices son siempre crecientes, y lo mismo vale de los números β', β'', ...; además, los números α', α'', ... van creciendo en magnitud, y los números β', β'', ... van decreciendo en magnitud; entre los intervalos $(\alpha...\beta)$,$(\alpha'...\beta')$, $(\alpha''...\beta'')$, ... cada uno de ellos incluye a todos los siguientes. En estas condiciones, cabe pensar dos casos.

O bien el número de los intervalos así formados es finito. Sea el último de ellos $(\alpha^{(\nu)}...\beta^{(\nu)})$; como en el interior del mismo puede encontrarse a lo sumo un número de la sucesión (4), es posible tomar en este intervalo un número η que no está contenido en (4), con lo cual el teorema está demostrado para este caso.

O bien el número de los intervalos que se han formado es infinitamente grande. Entonces los números α', α'', α''', ..., dado que van creciendo siempre en magnitud, sin crecer al infinito, tienen un cierto límite α^{∞}; y lo mismo vale para los números β', β'', β''', ..., dado que van decreciendo siempre en magnitud, siendo su límite β^{∞}. Si $\alpha^{\infty} = \beta^{\infty}$ (lo cual sucede siempre que se trate de la colección (ω) de todos los números reales algebraicos), es fácil convencerse de que el número $\eta = \alpha^{\infty} = \beta^{\infty}$ no puede estar contenido en nuestra sucesión, con sólo recordar la definición de los intervalos;[1] mas si $\alpha^{\infty} \neq \beta^{\infty}$, entonces todo número en el interior del intervalo $(\alpha^{\infty}... \beta^{\infty})$ o incluso en los límites del mismo satisface la condición descrita, de no estar contenido en la sucesión (4).

Los teoremas demostrados en este artículo admiten extensiones en diversas direcciones, de las cuales baste aquí con mencionar una:

«Si ω_1, ω_2, ... ω_n, ... es una sucesión finita o infinita de números linealmente independientes entre sí (de modo que no es posible una ecuación de la forma $a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + ... + a_n\omega_n = 0$, con coeficientes enteros que no sean todos nulos) y si se piensa en la colección (Ω) de todos aquellos números Ω que son re-

1. Si el número η estuviera contenido en nuestra sucesión, tendríamos que $\eta = \omega_p$, siendo p un determinado índice; mas esto no resulta imposible, dado que ω_p *no* cae dentro del intervalo $(\alpha^{(p)}...\beta^{(p)})$; , mientras que el número η por definición está situado dentro de dicho intervalo. [*N. del a.*]

presentables como funciones racionales con coeficientes enteros de dichos números ω, entonces en todo intervalo $(\alpha...\beta)$ hay infinitos números que no están contenidos en (Ω).»

De hecho es fácil convencerse, mediante un argumento similar al del § 1, de que la colección puede concebirse dada en forma de sucesión

$$\Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_n, \ldots,$$

de lo cual, considerando el presente § 2, se deduce la corrección del teorema.

Un caso muy especial de la mencionada proposición (en el cual la sucesión $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n, \ldots$ es finita, y el grado de las funciones racionales que determinan la colección (Ω) cumple ciertas condiciones) ha sido demostrado por el señor B. Minnigerode reduciéndolo a los principios de Galois. (Véanse los *Math. Annalen*, Tomo 4, p. 497.)

CORRESPONDENCIA CON DEDEKIND (1877-1882)

15. DEDEKIND A CANTOR:

Brunswick, 11 mayo 1877

La objeción del señor I[lligens] que Ud. me comunica no puede aplicarse a mi exposición, si es que la entiendo correctamente; naturalmente que el principio de continuidad establecido en el § 3 p. 18 debe entenderse como el *complemento* necesario para las leyes I, II, III [orden denso de $\mathbb{Q}$] resaltadas en el § 2 p. 15, y en II se dice precisamente aquello [la propiedad de densidad] que Ud. o el señor I. echan de menos. Aparentemente esa objeción no se habría planteado si hubiera antepuesto al principio en p. 18 el número IV, tal como se hace en realidad para las leyes análogas en el § 5 p. 25. ¿O es que he entendido mal la objeción? En cuyo caso le ruego aclaraciones.

16. CANTOR A DEDEKIND:

Halle, 17 mayo 1877

Agradeciéndole su respuesta, debo admitir que en la página 25 de su escrito sobre los números irracionales, bajo I, II, III, IV [orden denso y continuo], presenta Ud. propiedades que son totalmente características del dominio de todos los números reales, de modo que *ningún* otro sistema de valores reales comparte con ellos todas esas propiedades.

Con todo me permito hacerle el comentario de si quizá el énfasis que Ud. pone en diversos lugares de su escrito *expresamente* sobre la propiedad IV como *la esencia* de la continuidad, no podría dar ocasión a malentendidos, los cuales en mi opinión no podrían darse sin ese énfasis sobre IV (como la verdadera esencia) en su teoría. En particular, dice Ud. en el prólogo que el axioma indicado por mí coincide plenamente con aque-

llo que Ud. ofrece en el § 3 como la *esencia* de la continuidad. Mas por esto entiende Ud. la propiedad que viene indicada en la página 25 bajo IV; y esta propiedad conviene también al sistema de todos los números enteros, que sin embargo puede considerarse como el prototipo de discontinuidad.

En interés de este asunto, que tan valioso es para mí, le ruego que si dispone de tiempo entre con más detalle en mis objeciones.

P.S.

Me explico por qué pone Ud. especial énfasis en IV considerando que en esta propiedad yace aquello que diferencia el dominio numérico completo del dominio de todos los números racionales; y sin embargo me parece que, por las razones anteriores, no es posible adjudicarle a la propiedad IV el nombre empleado por Ud.: «esencia de la continuidad».

17. DEDEKIND A CANTOR:

Brunswick, 18 mayo 1877

Tras su última carta me parece que corremos el peligro de disputar más acerca de las palabras que de las cosas. Todo lector atento de mi escrito deberá ciertamente entender mi opinión sobre la continuidad como sigue: los dominios que presentan unas interrelaciones y una completitud en sus elementos como la que viene expresada por I y II en § 1 p. 14, § 2 p. 15, § 5 p. 25 (III es una consecuencia de I y sólo se indica a fin de preparar la formulación de IV) no son aún necesariamente dominios continuos; tales dominios reciben la propiedad de la continuidad al añadirse la propiedad IV (en p. 18 sin número, y en p. 25) y sólo a través de esta propiedad. Y en esta medida se designa dicha propiedad como la esencia de la continuidad.

Me comunica Ud. en su tarjeta del 10 del presente que mi definición de la continuidad no es completa, y me hace una propuesta de mejora a fin de remediar esa carencia. En respuesta yo rechazo esa propuesta, llamando su atención sobre II, donde está contenido lo que Ud. echaba en falta. Tras ello concede Ud. en su última carta que en mi definición no se ha desatendido nada; por ejemplo si digo: «los dominios que poseen

las propiedades I y II se llaman continuos si asimismo poseen la propiedad IV», no tendrá Ud. nada que objetar, si es que comprendo bien su última carta, contra la *completitud* de tal definición. Mas al parecer vería Ud. mejor que la propiedad II pasara de la subordinada relativa a la condicional: «los dominios cuyos elementos están interrelacionados según la propiedad I se llaman continuos si asimismo poseen las propiedades II *y* IV», y teme Ud. que mi énfasis *exclusivo* sobre IV como *la* propiedad que expresa la *esencia* de la continuidad, puede conducir a malentendidos. No comparto este temor; estoy firmemente convencido de que todo lector atento de mi escrito comprende mi opinión del modo en que la he expresado arriba en la introducción, y con ello queda descartado totalmente, como es natural, el ejemplo que Ud. aduce del sistema de todos los números racionales enteros como motivo para una objeción. Por lo que respecta a la transformación antes dada de la definición, no puedo decir que me guste, y deduzco de su *postscriptum* que Ud. mismo me concedería sin duda, en cuanto hiciera una sola vez el intento de *reorganizar* mi escrito en tal sentido, que dicho escrito —cuyo tema principal es la transición de la aritmética de los racionales a los irracionales— perdería en lo relativo a la expresión nítida de su punto clave, que consiste únicamente en enfatizar IV, dado que II ya está disponible en el dominio discontinuo de los racionales. Pero si alguien tiene preferencia por la definición transformada, no tengo nada que objetar a su *derecho* de hacerlo así, y menos aún en el caso de que para alguna otra investigación ofreciera ventajas. En cuanto a mí, prefiero con creces la forma original, y considero más apropiado poner el énfasis sobre IV exclusivamente como la esencia de la continuidad, discutiendo la propiedad II ya antes, cuando todavía no se trata de discontinuidad ni continuidad. En todo caso, niego la *necesidad* de transformar la definición absolutamente; si alguien fuera a exigir esto, podría igualmente plantearse la pregunta, de la cual también me he ocupado, de si no sería conveniente pasar también la propiedad I de la subordinada relativa a la condicional, en la medida en que se pueda. No es en absoluto una pregunta sin interés, pero nos llevaría demasiado lejos si quisiera entrar en el asunto. Creo en verdad que sólo somos de opiniones diferentes en lo relativo a qué es conveniente, no

en lo que es necesario, y por ello no creo que fuera a obtenerse gran cosa de proseguir el debate.

18. CANTOR A DEDEKIND:

Halle, 20 junio 1877

Agradeciendo su escrito del 18 de mayo, con cuyo contenido estoy plenamente de acuerdo, y reconociendo que la diferencia en nuestras opiniones era sólo externa,[1] hoy comparezco de nuevo con una petición. Advertirá Ud. que los intereses teóricos que nos unen tienen para Ud. el inconveniente de que le molesto más a menudo de lo que quizá fuera su deseo.

Me gustaría saber si considera Ud. aritméticamente riguroso un procedimiento demostrativo que he aplicado.

Se trata de mostrar que las superficies, cuerpos, e incluso los dominios continuos de dimensión ρ pueden ser coordinados unívocamente con líneas continuas, esto es, con dominios de solo *una* dimensión; y que por tanto las superficies, cuerpos, e incluso los dominios de ρ dimensiones, tienen la misma *potencia* que las curvas. Esta consideración parece oponerse a la que reina de modo general entre los representantes de la nueva geometría, ya que hablan de dominios simplemente infinitos, doblemente, triplemente, ... ρ-uplemente infinitos, e incluso en ocasiones se encuentra la idea de que la infinitud de los puntos de una superficie se lograría como si fuera por cuadratura, la de un cuerpo por cubatura de la infinitud de los puntos de una línea.

Dado que los dominios de igual dimensión pueden ser interrelacionados *analíticamente*, me parece que aquellas cuestiones generales pueden ponerse en la siguiente forma puramente aritmética:

1. Sin embargo, quizá sí se hubiera ganado algo en caso de que Cantor hubiera expresado mejor su dificultad: la cuestión era —o acabaría siendo— que Cantor deseaba una definición de continuo que pudiera aplicarse de forma inmediata a cualquier conjunto en el espacio n-dimensional $\mathbb{R}^n$ (de este tipo es la que da en los *Fundamentos*, § 10). La definición de Dedekind sólo puede aplicar en el caso de órdenes totales, y su aplicación a variedades n-dimensionales es retorcida, debiendo pasar a través de la introducción de coordenadas locales o globales. [N. *del ed.*]

«Sean x_1, x_2, ... x_ρ ρ magnitudes reales variables independientes, cada una de las cuales puede tomar todos los valores que son ≥ 0 y ≤ 1. Sea y una magnitud real variable $\rho+1$-ésima, con el mismo campo de juego ($0 \leq y \leq 1$).

¿Es entonces posible coordinar las ρ variables x_1, x_2, ... x_ρ con la y, de modo que a cada sistema de valores concreto (x_1, x_2, ... x_ρ) le corresponda un cierto valor y, y también a la inversa, a cada valor concreto y le corresponda un y sólo un sistema de valores (x_1, x_2, ... x_ρ)?».

Esta cuestión debe responderse en la *afirmativa*, según creo ahora, *aunque durante años consideré lo contrario como correcto*, por las siguientes razones:

Todo número $x \geq 0$ y ≤ 1 puede ser representado de un y sólo un modo bajo la forma de una fracción decimal *infinita*, de modo que:

$$x = \alpha_1 \cdot \frac{1}{10} + \alpha_2 \cdot \frac{1}{10^2} + \ldots + \alpha_\nu \cdot \frac{1}{10^\nu} + \ldots$$

donde α_ν son números enteros que son ≥ 0 y ≤ 9. Cada número x determina pues una sucesión infinita α_1, α_2, ... e inversamente.

Por tanto podemos escribir:

$$x_1 = \alpha_{1,1} \cdot \frac{1}{10} + \alpha_{1,2} \cdot \frac{1}{10^2} + \ldots + \alpha_{1,\nu} \cdot \frac{1}{10^\nu} + \ldots$$

$$x_2 = \alpha_{2,1} \cdot \frac{1}{10} + \alpha_{2,2} \cdot \frac{1}{10^2} + \ldots + \alpha_{2,\nu} \cdot \frac{1}{10^\nu} + \ldots$$

$$x_\rho = \alpha_{\rho,1} \cdot \frac{1}{10} + \alpha_{\rho,2} \cdot \frac{1}{10^2} + \ldots + \alpha_{\rho,\nu} \cdot \frac{1}{10^\nu} + \ldots$$

De estos ρ números se puede derivar un $\rho+1$-ésimo número y:

$$y = \beta_1 \cdot \frac{1}{10} + \beta_2 \cdot \frac{1}{10^2} + \ldots + \beta_\nu \cdot \frac{1}{10^\nu} + \ldots$$

si se toma:

(I) $$\beta_{(n-1)\rho+1} = \alpha_{1,n};\ \beta_{(n-1)\rho+2} = \alpha_{2,n};\ \ldots$$
$$\beta_{(n-1)\rho+\sigma} = \alpha_{\sigma,n};\ \ldots\ \beta_{(n-1)\rho+\rho} = \alpha_{\rho,n}\ .$$

Dado que cada número entero positivo ν puede ponerse de un y sólo un modo en la forma:

$$\nu = (n-1)\rho + \sigma \text{ donde } \sigma \lessgtr^{0}_{\rho},$$

se observa que mediante la ecuación (I) la sucesión $\beta_1, \beta_2, \ldots$ está perfectamente determinada, y por tanto también *y*;
más también a la inversa, partiendo del número *y* y por tanto de la sucesión $\beta_1, \beta_2, \ldots$, la ecuación (I) determina *unívocamente* las ρ sucesiones:

$$\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \ldots$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$\alpha_{\sigma,1}, \alpha_{\sigma,2}, \ldots$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$\alpha_{\rho,1}, \alpha_{\rho,2}, \ldots$$

y por consiguiente también los ρ números $x_1, x_2, \ldots x_\rho$.

19. DEDEKIND A CANTOR:

Brunswick, 22 junio 1877

La única objeción que por el momento puedo elevar contra su interesante argumentación, y que quizá Ud. pueda dar de lado sin dificultad, es la siguiente. Dice Ud.: «Todo número *x* (≥ 0 y ≤ 1) puede ser representado de un y sólo un modo bajo la forma de una fracción decimal *infinita*, de modo que:

$$x = \alpha_1/10 + \alpha_2/10^2 + \ldots + \alpha_\nu/10^\nu + \ldots$$

donde α_ν son números enteros que son ≥ 0 y ≤ 9. Cada número *x* determina pues una sucesión infinita $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ e inversamente». El subrayado de la palabra «*infinita*» me conduce a sospechar que pretende Ud. excluir el caso de una fracción finita, en el que tras un α_ν distinto de 0 seguiría únicamente la cifra $0 = \alpha_{\nu+1} = \alpha_{\nu+2} = \text{etc.}$; y que por tanto en lugar de

$$x = \alpha_1/10 + \alpha_2/10^2 + \ldots + \alpha_\nu/10^\nu + 0/10^{\nu+1} + \\ + 0/10^{\nu+2} + \ldots + 0/10^{\nu+\nu'} + \ldots$$

querría Ud. escribir siempre

$$x = \alpha_1/10 + \alpha_2/10^2 + \ldots + \alpha_{\nu-1}/10^\nu + 9/10^{\nu+1} + \\ + 9/10^{\nu+2} + \ldots + 9/10^{\nu+\nu'} + \ldots,$$

a fin de excluir toda posibilidad de una representación doble de un mismo número *x* (si bien el propio número 0 debería ser representado bajo la forma 0,0000...; pero $x = 3/10$ bajo la forma 0,29999...).

Si ésta es su opinión (como es natural, uno podría igualmente excluir el caso de que a partir de una cierta posición aparezca sólo la cifra 9; pero entonces sucedería algo análogo), entonces mi objeción es como sigue.[2] Me limitaré por simplicidad al caso $\rho = 2$ y pondré:

$$x = \alpha_1/10 + \alpha_2/10^2 + \ldots = 0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\nu\ldots$$
$$y = \beta_1/10 + \beta_2/10^2 + \ldots = 0,\beta_1\beta_2\ldots\beta_\nu\ldots$$

para formar, tal como Ud., a partir de los dos números x, y en cada caso el tercer número

$$z = 0,\gamma_1\gamma_2\gamma_3\ldots$$

donde

$$\gamma_1 = \alpha_1,\ \gamma_2 = \beta_1,\ \gamma_3 = \alpha_2,\ \gamma_4 = \beta_2,\ \ldots\ \gamma_{2\nu-1} = \alpha_\nu,\ \gamma_{2\nu} = \beta_\nu,\ \ldots,$$

entonces z es siempre una función plenamente definida de las dos variables continuas x, y y está contenida en el mismo intervalo $(0 \leq \tau \leq 1)$. Pero entonces existen infinitas fracciones legítimas a las que z no será *nunca* igual, por ejemplo,

$$0,478310507090\alpha_7 0\alpha_8 0\alpha_9 0\ldots\alpha_\nu 0\ldots$$

como también toda fracción $0,\gamma_1\gamma_2\gamma_3\ldots$ en la cual de una cierta posición en adelante sea o bien $\gamma_{2\nu-1}$ o bien $\gamma_{2\nu}$ siempre $= 0$; ya que al derivar inversamente x, y a partir de un tal z nos veríamos llevados a un x o un y no disponible (excluido).

No sé si mi objeción tiene una significación esencial para sus ideas, mas no quería dejar de formularla.

20. CANTOR A DEDEKIND, TARJETA CON ESTAMPA DEL 23.6.77:

Por desgracia tiene Ud. toda la razón en su objeción; afortunadamente, sólo afecta a la demostración y no al asunto; pues demuestro *en cierto modo más* de lo que pretendía, ya que he puesto en relación unívoca un sistema $x_1, x_2, \ldots x_\rho$ de variables reales ilimitadas (que son ≥ 0 y ≤ 1) con una variable y, contenida en el

2. Se encuentra en el artículo de Cantor «Ein» *Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre* § 7 (*J. Crelle* 84, *Ges. Abhandl.* p. 130). [*N. de Noether y Cavaillès.*]

mismo intervalo pero que no toma todos los valores del mismo, sino todos con la excepción de algunos y''. Mas cada uno de los valores que le corresponden y' lo toma solo *una vez*, y esto es según creo lo esencial. Ya que ahora puedo poner a y' en relación unívoca con otra variable t, que recibe todos los valores ≥ 0 y ≤ 1.

Sólo me queda alegrarme de que, por lo demás, hasta el momento no haya encontrado Ud. nada que objetar; próximamente me permitiré escribirle más detalladamente acerca de este tema.

21. CANTOR A DEDEKIND:

Halle, 25 junio 1877

En una tarjeta postal que le dirigí anteayer, reconocía la laguna que Ud. ha descubierto en mi demostración y mencionaba también que me encuentro en situación de llenarla, si bien no puedo reprimir un lamento al ver que no resulta posible despachar el asunto sin consideraciones más complicadas. Mas esto debe residir en la naturaleza del asunto y debo consolarme; quizá posteriormente se encuentre que el elemento que faltaba en aquella demostración se puede suplir más fácilmente de lo que está al alcance de mis fuerzas en este momento. Mas como, ahora mismo, lo que más me concierne es convencerle a Ud., si es posible, de la corrección de mi resultado, a saber, del teorema:

(A) «Una variedad continua extendida en e dimensiones se puede coordinar unívocamente con una variedad continua de una dimensión; o bien (lo que sólo representa una versión diferente del mismo teorema): los puntos (elementos) de una variedad extendida en ρ dimensiones se pueden determinar por medio de una coordenada real t, de manera que a cada valor de t en el intervalo (0...1) le corresponda un punto de la variedad, y también a la inversa, a cada punto de la var. le corresponda un valor determinado de t en el intervalo (0...1).»

me permito presentarle otra demostración del mismo,[3] con la cual di incluso antes que con aquélla.

3. Publicado en una versión similar en el trabajo de Cantor «Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre», *J. Crelle* 84 (1878), *Ges. Abhandl.* pp. 122 y ss.

Parto del teorema que dice que todo número irracional $e \gtrless_1^0$ admite representación de manera completamente determinada bajo la forma de una fracción decimal infinita:

$$e = \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \ddots + \cfrac{1}{\alpha_\nu + \vdots}}} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \ldots)$$

donde α_ν es un número racional entero positivo. A cada número irracional $\gtrless_1^0$ le corresponde una cierta sucesión infinita α_ν e inversamente a cada sucesión infinita α_ν le corresponde un determinado número irracional $e \gtrless_1^0$.

Si ahora $e_1, e_2, \ldots e_\rho$ son ρ magnitudes independientes entre sí, cada una de las cuales puede tomar todos los valores numéricos irracionales del intervalo (0...1) y sólo dichos valores, pongamos:

$$\begin{aligned} e_1 &= (\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \ldots \alpha_{1,\nu}, \ldots) \\ e_2 &= (\alpha_{2,1}, \alpha_{2,2}, \ldots \alpha_{2,\nu}, \ldots) \\ &\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ e_\rho &= (\alpha_{\rho,1}, \alpha_{\rho,2}, \ldots \alpha_{\rho,\nu}, \ldots) \end{aligned}$$

y determinemos a partir de ellos el $\rho+1$-ésimo número irracional:

$$\partial = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu, \ldots)$$

merced al sistema de ecuaciones:

(I) $\beta_{(n-1)\rho+1} = \alpha_{1,n}, \ldots \beta_{(n-1)\rho+\sigma} = \alpha_{\sigma,n}, \ldots \beta_{n\rho} = \alpha_{\rho,n};$

entonces también, a la inversa, todo número irracional $\partial \gtrless_1^0$ engendrará un determinado sistema $e_1, e_2, \ldots e_\rho$ en virtud de (I).

[*Nota de Noether y Cavaillès.*] Resulta interesante ver cómo en el teorema (A) Cantor sigue exactamente la terminología de la famosa lección de Riemann sobre geometría. También es interesante ver el efecto que las reformulaciones ofrecidas por Dedekind en su carta anterior tienen sobre la notación y la terminología de Cantor en la presente. En esencia, puede decirse que la carta del 20 de junio está redactada estilo Berlín (Weierstrass), la del 25 estilo Gotinga (Riemann–Dedekind). [*N. del ed.*]

En este caso no se encuentra, según creo, el impedimento que Ud. hizo notar en relación a mi anterior demostración.

Y ahora se trata de demostrar el siguiente teorema:

(B) «Un número variable e, que puede tomar todos los valores numéricos *irracionales* del intervalo (0...1), se puede coordinar *unívocamente* con un número x que recibe *todos* los valores de ese intervalo, sin excepción».

Pues una vez que esta proposición (B) esté demostrada, podremos hacer corresponder biunívocamente a las variables designadas antes con $e_1, e_2, \ldots e_\rho$ y ϑ, respectivamente:

$$x_1, x_2, \ldots x_\rho, y,$$

de modo que estas otras variables tengan un campo de juego ilimitado en el intervalo (0...1). Con ello se habrá establecido una relación unívoca y recíproca entre el sistema

$$(x_1, x_2, \ldots x_\rho)$$

de un lado, y la variable y del otro, lo cual conduce a la demostración del teorema (A).

Ahora, para demostrar (B), pónganse primeramente todos los números *racionales* del intervalo (0...1) (los extremos incluidos) en forma de sucesión; sean:

$$r_1, r_2, \ldots r_\nu, \ldots$$

Los valores que puede tomar la variable e son, por tanto, *todos* los del intervalo (0...1) *con la excepción* de los números r_ν.

Además tómese en el intervalo (0...1) una sucesión infinita arbitraria ε_ν de números *irracionales*, con la única condición de que satisfagan $\varepsilon_\nu < \varepsilon_{\nu+1}$ y de que $\lim(\varepsilon_\nu) = 1$ para $\nu = \infty$, y denótese por f una cantidad variable que puede tomar todos los valores $\gtrless_1^0$, exceptuados los valores ε_ν. Es posible ahora poner a las dos cantidades e y f, que varían de manera limitada, en una relación unívoca y recíproca entre sí, por medio de las siguiente definiciones:

si f no es igual a ningún r_ν, sea el correspondiente

$$e = f;$$

pero si $f = r_\nu$, entonces sea el correspondiente $e = \varepsilon_\nu$; entonces es fácil convencerse de que también, inversamente: si e no es igual a ningún ε_ν, el correspondiente $f = e$, y si $e = \varepsilon_\nu$, entonces $f = r_\nu$.

El teorema (B) queda ahora reducido a la siguiente proposición:

(C) «Un número f que puede tomar todos los valores del intervalo (0...1) con la excepción de ciertos ε_ν, ligados por la condición de que $\varepsilon_\nu < \varepsilon_{\nu+1}$ y lim $(\varepsilon_\nu) = 1$, puede coordinarse biunívocamente con una variable continua e que toma todos los valores del intervalo (0...1) sin excepción».

Aquí nos corresponde establecer que los puntos e_1, e_2, ... forman una *sucesión* y por tanto el intervalo (0...1) queda dividido por ellos en una cantidad infinita de subintervalos.

Por tanto, cosa que no puede escapársele a Ud., dicho teorema (C) puede demostrarse por aplicación sucesiva de la siguiente proposición:

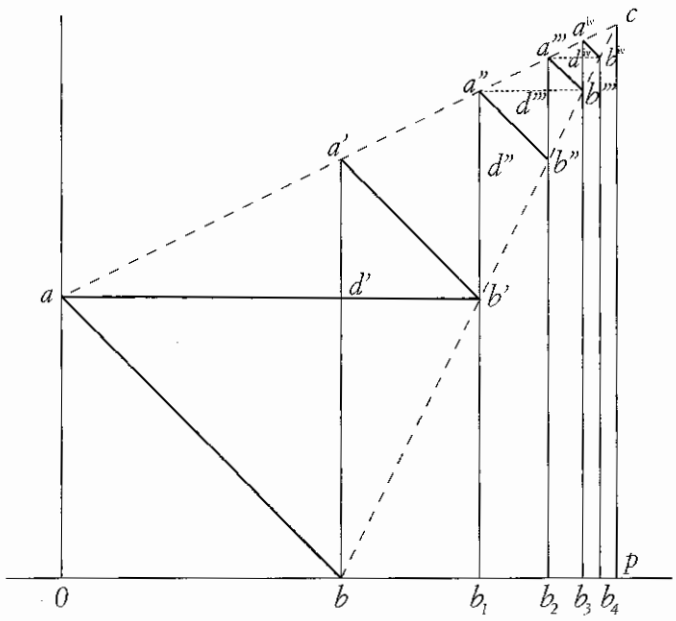
(D) «Un número y que puede tomar todos los valores del intervalo (0...1) con la única excepción del valor 0, puede ser coordinado biunívocamente con un número x que toma todos los valores del intervalo (0...1) sin excepción».

Podemos reconocer la verdad de este último teorema (D) contemplando la notable curva que se adjunta (p. 192).

Las coordenadas de un punto m que recorre la curva son mis cantidades x, y, de las cuales una es función unívoca de la otra; mas si bien x toma todos los valores del intervalo (0...1), el campo de juego de y es aquél con la *única excepción del valor 0*.

La curva está compuesta de infinitos segmentos de recta paralelos ab, $a'b'$, $a''b''$, ..., que se van haciendo cada vez más pequeños, y del punto c. *Los extremos b, b', b'', ... se consideran no pertenecientes a la curva.* Las longitudes son:

$$op = pc = 1;\ ob = {}^1/_2;\ bb_1 = {}^1/_4,\ b_1b_2 = {}^1/_8,\ b_2b_3 = {}^1/_{16},\ \ldots$$
$$oa = {}^1/_2;\ a'd' = {}^1/_4;\ a''d'' = {}^1/_8;\ a'''d''' = {}^1/_{16},\ \ldots$$



Desde hace años he seguido con interés los esfuerzos realizados, en relación con Gauss, Riemann, Helmholtz y otros, por aclarar todas aquellas cuestiones que tocan a los primeros presupuestos de la geometría. Al hacerlo me llamó la atención que todas las investigaciones convincentes que se han realizado en este campo parten *a su vez* de un presupuesto no demostrado, el cual no me pareció evidente sino más bien necesitado de fundamentación. Me refiero al supuesto de que una variedad continua de ρ dimensiones requiere,[4] para la determinación de sus elementos, ρ coordenadas reales independientes entre sí, y que dicho número de coordenadas no puede ser aumentado ni reducido para una misma variedad.

4. Tanto en esta carta como en las siguientes (también de Dedekind) se emplean expresiones muy típicas de Riemann, como: variedad continua «p-úplemente extensa» [ρ fach ausgedehnte], o dominio «ρ-uple» [ρ fach]. Para hacer más legible la traducción, las evitamos y decimos siempre «de ρ dimensiones». Recuérdese también que Cantor suele escribir «variedad» para decir conjunto, como sucede muy especialmente en los *Fundamentos* de 1883, aunque de nuevo hemos decidido no reflejarlo en la traducción. [*N. del ed.*]

Dicha suposición se me había convertido a mí también en cuestión de opinión, y estaba casi convencido de su corrección; mi punto de vista sólo se distinguía de todos los demás en que yo consideraba ese supuesto como una proposición que requería en alto grado una demostración, y para enfatizar ese punto de vista le di la forma de una pregunta que planteé a varios colegas, especialmente con ocasión de la conmemoración de Gauss en Gotinga [1877], a saber la pregunta siguiente:

«¿Se puede relacionar unívocamente un dominio continuo de ρ dimensiones, donde $\rho > 1$, con un dominio continuo de una dimensión, de manera que a cada punto del uno corresponda un y sólo un punto del otro?».

La mayoría de aquellos a los que planteé esta pregunta se maravillaban de que hubiera llegado a formularla, ya que *se entiende de suyo* que para determinar un punto en una extensión de ρ dimensiones han de emplearse siempre ρ coordenadas independientes. Pero el que penetraba en el sentido de la cuestión se veía obligado a confesar que al menos exigía una demostración por qué había que contestarla con un «evidentemente» *no*. Como he dicho, yo mismo pertenecía a aquellos que consideraban lo *más probable* que la pregunta se respondería con un no... hasta que hace muy poco tiempo alcancé la convicción, a través de una serie de pensamientos bastante complicada, de que la pregunta debía contestarse sin ninguna limitación con un *sí*. Poco después encontré la demostración que hoy ve Ud. ante sí.

Vemos ahí qué fuerza maravillosa hay en los números reales racionales e irracionales, para que uno logre determinar con ellos unívocamente los elementos de una variedad continua de ρ dimensiones *mediante una sola coordenada*. Y me apresuro a añadir que su fuerza va aún más lejos, ya que, como no se le escapará a Ud., mi demostración puede generalizarse sin un particular aumento de las dificultades a variedades con un número de dimensiones infinitamente grande, supuesto que las infinitas dimensiones tomen la forma de una sucesión infinita simple.

Ahora me parece que todas las deducciones filosóficas o matemáticas que hacen uso de aquella suposición errónea son inadmisibles. Más bien habrá que buscar la distinción que existe entre dominios de *diferente* número de dimensiones en aspec-

tos [Momenten] totalmente diferentes, y no en el número de coordenadas independientes tomado como característica.

22. CANTOR A DEDEKIND:

Halle, 29 jun. 1877

Sea Ud. benévolo y perdone mi afán por esta cuestión, al exigir tanto de su amabilidad y sus esfuerzos. Lo que le he comunicado recientemente es para mí mismo tan inesperado, tan nuevo, que por así decir no podré alcanzar una cierta tranquilidad de ánimo hasta haber obtenido de Ud., muy estimado amigo, una decisión sobre si es correcto. Hasta que no me dé Ud. su aprobación, sólo puedo decir: *je le vois, mais je ne le crois pas.*[5] Le ruego que tenga la bondad de escribirme en una tarjeta postal, cuándo podría Ud. haber completado la comprobación del asunto, si es que puedo contar con que mi ruego, ciertamente exigente, se cumpla.

La demostración del teorema (C) se ve muy simplificada empleando el simbolismo siguiente:

Si a y b son dos cantidades variables que pueden ser coordinadas unívocamente entre sí, escribiremos:

$$a \sim b.$$

Por tanto, si $a \sim b$ y $b \sim c$, entonces también:

$$a \sim c.$$

Si además a', a'', ... son una sucesión finita o infinita de variables o constantes bien definidas, que no toman ningún valor en común dos a dos, pero cuyo campo de juego, tomado conjuntamente, es exactamente el mismo que el de una variable a, entonces pongamos:

$$a \equiv (a', a'', \ldots).$$

Entonces tenemos el siguiente teorema:

(E) «Si: $a \equiv (a', a'', \ldots)$
$b \equiv (b', b'', \ldots)$

5. Lo veo, pero no lo creo. [*N. del ed.*]

y si además:

$$a' \sim b'$$
$$a'' \sim b''$$
$$a''' \sim b'''$$
.....

entonces también:

$$a \sim b».$$

De (D) se obtiene en primer lugar, mediante las sustituciones:

$$y = \frac{z - \alpha}{\beta - \alpha}\ ; \qquad x = \frac{u - \alpha}{\beta - \alpha}\ ,$$

la siguiente generalización de (D):

(F) «Un número z que puede tomar todos los valores de un intervalo $(\alpha...\beta)$ con la única excepción del valor α, puede ser coordinado unívocamente con un número u que toma todos los valores del intervalo $(\alpha...\beta)$ sin excepción».

De ahí se deduce en primer lugar el siguiente teorema:

(G) «Un número w que recibe todos los valores del intervalo $(\alpha...\beta)$ con la excepción de ambos valores extremos α, β, puede ser coordinado unívocamente con un número variable u que toma todos los valores del intervalo $(\alpha...\beta)$.»

Demostración. Sea γ un número $\lesseqgtr_{\beta}^{\alpha}$

w' una variable que toma todos los valores del intervalo $(\alpha...\gamma)$ con la excepción de α y γ, w'' una variable que toma todos los valores del intervalo $(\gamma...\beta)$ con la excepción del extremo β.

Entonces es:

(1) $$w \equiv (w', w'').$$

Si ahora se designa con u'' una variable que adopta todos los valores del intervalo $(\gamma...\beta)$ sin excepción, con z una variable que toma todos los valores del intervalo $(\alpha...\beta)$ con la excepción de α, tenemos:

(2) $$w'' \sim u'',$$

y de acuerdo con (1) y (E):

$$w \sim (w', u'').$$

Pero también: $(w', u'') \equiv z$, de modo que:

$$w \sim z.$$

Según (F), tenemos también:

$$z \sim u, \qquad \text{y por tanto también:}$$
$$w \sim u, \qquad \text{q. e. d.}$$

Ahora, para demostrar (C) descomponemos f en las variables $f', f'', \ldots$ y el valor aislado 1, donde f' toma todos los valores del intervalo $(0 \ldots \varepsilon_1)$ con la excepción de ε_1, $f^{(\nu)}$ todos los valores del intervalo $(\varepsilon_{\nu-1} \ldots \varepsilon_\nu)$ con la excepción de los extremos $\varepsilon_{\nu-1}$ y ε_ν. Entonces tenemos:

$$f \equiv (f', f'', f''', \ldots f^{(\nu)}, \ldots, 1).$$

Sea x'' una variable que adopta los valores de $(\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_2)$,

—— x^{iv} — — $(\varepsilon_3 \ldots \varepsilon_4)$
—— $x^{(2\nu)}$ — — $(\varepsilon_{2\nu-1} \ldots \varepsilon_{2\nu})$

sin excepción,

entonces a consecuencia de (G) es:

$$f' \sim x''$$
$$f^{iv} \sim x^{iv}$$
$$\ldots \ldots$$
$$f^{(2\nu)} \sim x^{(2\nu)}$$
$$\ldots \ldots$$

y por tanto:

$$f \sim (f', x'', f''', x^{iv}, \ldots f^{(2\nu-1)}, x^{(2\nu)}, \ldots, 1).$$

Pero tenemos:

$$(f', x'', f''', x^{iv}, \ldots f^{(2\nu-1)}, x^{(2\nu)}, \ldots, 1) \equiv x$$

con lo cual:

$$f \sim x.$$

23. DEDEKIND A CANTOR:

Brunswick, 2 jul. 1877

He revisado una vez más su demostración y no he encontrado ninguna laguna; estoy seguro de que su interesante teorema es correcto, y le felicito por él. Pero me gustaría, tal como le anuncié en la tarjeta postal, expresar una consideración que se dirige *contra* las consecuencias que relaciona Ud. con la demostración en su carta del 25 de junio y que tienen que ver con el concepto de variedad continua de ρ dimensiones. Sus palabras podrían dar la impresión —aunque mi lectura puede ser incorrecta— de que sobre la base de su teorema quisiera Ud. poner en duda la significación o la importancia de dicho concepto. Por ejemplo, al final de esa carta dice Ud.: «*Ahora me parece* que todas las deducciones filosóficas o matemáticas que hacen uso de aquella suposición errónea» [que el número de dimensiones es fijo] «son inadmisibles. Más bien habrá que buscar la distinción que existe entre dominios de *diferente* número de dimensiones en aspectos totalmente diferentes, y no en el número de coordenadas independientes tomado como característica».

Contra esto quiero expresar mi convicción o mi creencia (a pesar de su teorema, o más bien a causa de las consideraciones motivadas por su teorema, si bien aún no he tenido tiempo de hacer siquiera un intento de demostración) de que el número de dimensiones de una variedad continua es, ahora igual que antes, el primer y más importante invariante de la misma, y quiero poner bajo mi protección a todos los autores que han escrito previamente acerca de este asunto. Sin dudar le concedo que dicha constancia del número de dimensiones está muy necesitada de prueba, y mientras no se haya realizado esta demostración puede uno dudar de ella. Mas yo no dudo de su invariancia, por más que parezca haber sido anihilada por su teorema. Es obvio, sin embargo, que todos los escritores han hecho el supuesto implícito, tan natural, de que al determinar los puntos de una variedad continua mediante coordenadas nuevas estas últimas deben también (en general) ser funciones *continuas* de las viejas coordenadas, para que aquello que según la primera determinación de lugar aparece como continuamente conexo, se mantenga continuamente conexo en la segunda

determinación de lugar. De manera provisional, creo en la siguiente proposición: «Si se logra establecer una correspondencia unívoca por ambas partes y completa entre los puntos de una variedad continua A de a dimensiones, y los puntos de una variedad continua B de b dimensiones, entonces necesariamente esta *misma correspondencia es totalmente discontinua*, si a y b son *desiguales*». Este teorema explicaría también el fenómeno que se ha puesto de manifiesto en su primera demostración, a saber, precisamente que la demostración era incompleta; la relación que pretendía establecer Ud. entonces (mediante fracciones decimales) entre los puntos de un dominio de ρ dimensiones y los puntos de un «uni-segmento» habría sido *continua* (si no estoy equivocado), de haber abarcado a *todos* los puntos del uni-segmento. Del mismo modo, me parece que en su demostración actual la correspondencia *inicial* entre los puntos del ρ-segmento, cuyas coordenadas son todas irracionales, y los puntos del uni-segmento, también de coordenadas irracionales, es en cierto sentido (pequeñez de las variaciones) tan continua como es posible; pero a fin de rellenar los huecos se ve Ud. forzado a introducir una horrenda discontinuidad en la correspondencia, que causa vértigo, con la cual todo se ve disuelto en átomos, de manera que toda parte continuamente conexa de un dominio, por pequeña que sea, aparece en su imagen totalmente desgarrada, discontinua.

Espero haberme expresado con suficiente nitidez. La intención de este escrito es solamente pedirle a Ud. que no polemice públicamente contra los artículos de fe que vienen teniéndose por verdaderos en la teoría de variedades [teoría de conjuntos], sin antes realizar una comprobación cuidadosa de mi objeción.

24. CANTOR A DEDEKIND, TARJETA FECHADA EL 2.7.77:

Me alegro mucho de que haya Ud. comprobado la cuestión y la haya encontrado correcta. Le ruego que mantenga su proyecto inicial y me comunique más detallada y extensamente sus consideraciones sobre el sentido del resultado. Me gustaría tenerlos en cuenta antes de formarme un juicio acerca de cómo proseguir con el asunto.

25. CANTOR A DEDEKIND:

Halle, 4 jul. 1877

Me ha alegrado mucho su carta del 2 de julio, y le agradezco sus comentarios detallados y extraordinariamente apropiados.

Con las palabras finales de mi carta del 25 de junio he dado la impresión, contra mi intención, de que quisiera oponerme frontalmente con mi demostración al concepto de variedad continua de ρ dimensiones, cuando todo mi esfuerzo se dirige más bien a clarificar dicho concepto y conducirlo al punto de vista correcto. Al decir: «me parece que todas las deducciones filosóficas o matem. que hacen uso de aquella suposición errónea», me refería *no* a la suposición de que «el número de dimensiones es fijo», sino a que lo es el número de coordenadas independientes; número que ciertos autores suponen igual al número de dimensiones bajo todas las circunstancias, mientras que, si se toma el concepto de coordenada *en general*, sin hacer ningún supuesto sobre la naturaleza de las funciones que intervienen, es posible, según he mostrado, hacer que el número de coordenadas independientes, unívocas y completas, sea cualquier número prescrito. Yo también soy de la misma opinión que Ud., que si se establece la condición de que la correspondencia debe ser continua, entonces sólo es posible relacionar entre sí unívocamente los dominios que tienen las mismas dimensiones, y que de esta manera el número de coordenadas independientes establece un invariante que debería conducir a la definición del número de dimensiones de un dominio continuo.

No he logrado sin embargo saber hasta qué grado alcanzan las dificultades a superar por este camino (para llegar al concepto de número de dimensiones), ya que no sé si estamos en condiciones de delimitar el concepto de *correspondencia continua en general*. Y me parece que todo depende de la posibilidad de una tal delimitación.

Me parece reconocer una dificultad adicional en que este camino debería fallar en cuanto el dominio dejase de ser completamente continuo; y sin embargo uno quisiera tener también en este caso algo correspondiente al número de dimensiones,

tanto más cuanto que parece difícil establecer la completa continuidad de las variedades que se dan en la naturaleza.

Con estas líneas me gustaría sólo indicarle que estoy muy lejos de querer utilizar mi resultado sin más contra los artículos de fe de la teoría de variedades, antes bien me llena el deseo de contribuir algo gracias a él, en la medida de lo posible, a establecer y asegurar aquellas proposiciones. No quiero hoy exigir más de su tiempo, y sólo le pido que, si encontrara tiempo para ello, investigue las cuestiones que se nos proponen, que no las desprecie, y que tenga a bien hacerme partícipe entonces de sus resultados.

26. CANTOR A DEDEKIND:

Halle, 23 oct. 1877

En relación con la investigación desarrollada el verano pasado, el señor Borchardt [editor del *Journal* de Crelle] tiene desde hace un cuarto de año una redacción mía con el título: una contribución a la teoría de variedades [teoría de conjuntos]. Espero que aparecerá próximamente. Dado que al prepararla he sacado provecho de sus amables consejos, quizá le interese saber que he encontrado una demostración más simple para uno de mis teoremas. Si dos conjuntos bien definidos se pueden coordinar entre sí, unívoca y completamente, elemento a elemento, empleo la forma de expresión siguiente: ambos tiene *la misma potencia* [Mächtigkeit], o también son *equivalentes*; también digo que dos variables reales a y b son *equivalentes* cuando se pueden coordinar entre sí unívoca y completamente, y en este caso escribo, como Ud. sabe:

$$a \sim b.$$

Se trata ahora del siguiente teorema:

«Si e es una variable que ha de tomar todos los valores irracionales $\gtrless_1^0$, x una variable que recibe todos los valores racionales e irracionales que son ≥ 0 y ≤ 1, entonces:

$$e \sim x\text{»}.$$

Demostración. Sea φ_ν el término general de una sucesión que consiste en todos los números racionales ≥ 0 y ≤ 1; sea η_ν el

término general de una sucesión formada por cualesquiera números irracionales desiguales $\gtrless^0_1$, por ejemplo:

$$\eta_\nu = \sqrt{2}/_{2\nu};$$

designemos con h la variable que toma todos los valores del intervalo (0...1) con excepción de los φ_ν y los η_ν.

Entonces:

(1) $$x \equiv \{h, \eta_\nu, \varphi_\nu\}$$
$$e \equiv \{h, \eta_\nu\}.$$

Para la última fórmula podemos también escribir:

(2) $$e \equiv \{h, \eta_{2\nu-1}, \eta_{2\nu}\}.$$

Si se comparan las fórmulas (1) y (2) y se percibe que:

$$h \sim h; \qquad \eta_\nu \sim \eta_{2\nu-1}; \qquad \varphi_\nu \sim \eta_{2\nu},$$

entonces se sigue que:

$$e \sim x, \qquad \text{c. q. d.}$$

¿Quizá ha investigado Ud. más el problema de si, al determinar conceptualmente las variedades continuas de *n* dimensiones, basta la condición de que la correspondencia sea continua para que el concepto se vuelva fijo en sí mismo y seguro frente a toda contradicción?

P.S. He estado hojeando el nuevo manual de análisis de Lipschitz, ¿le gusta a Ud.?

27. DEDEKIND A CANTOR:

Brunswick, 27 oct. 1877

Le doy a Ud. mis más cumplidas gracias por su carta y por la amable recepción de mi tratado [sobre funciones modulares elípticas]. Me alegra saber que pronto aparecerán en el *Journal* de Borchardt sus investigaciones tan interesantes sobre la teoría de variedades: durante un viaje en las vacaciones a Königsberg le he comunicado el resultado principal de las mismas a H. Weber, espero que sin haber cometido una indiscreción; él ya había sabido de Ud. mismo, durante la celebración del centenario

de Gauss en Gotinga, que se ocupaba de este asunto, y se alegró de saber que desde entonces había obtenido Ud. una demostración rigurosa del sorprendente resultado. Su comunicación de hoy contiene una simplificación muy notable, y por tanto muy agradable, de la demostración; a posteriori uno se sorprende de no haber caído en ello antes. En cuanto a mí, desde nuestra última correspondencia no me he ocupado más de este asunto; pero sigo *creyendo* que el concepto del número de dimensiones realmente mantiene su carácter de invariante bajo la condición de la correspondencia *continua*.

La obra de Lipschitz contiene mucho de bueno e interesante, hasta donde la he podido mirar de momento; conforme a mi natural crítico, tengo algunos reparos que poner en algún punto, pero encuentro muy satisfactorio el que se haya realizado un intento serio de hacer reinar el rigor matemático también en un *manual* [Lehrbuch]. En lo relativo a la fundamentación de la teoría de los irracionales, donde se circunscribe casi completamente a su exposición de Ud., publicada por vez primera por el señor Heine, a lo sumo tengo que objetar que (en p. 46) se presenta un *supuesto* que realmente es muy nuevo («Entonces el valor límite **G** cae ...») como si fuera una *consecuencia* evidente de lo anterior; además, no puede conceder que el comentario final sobre los griegos, en el § 14, sea correcto.[6]

28. CANTOR A DEDEKIND:[7]

Halle, 10 nov. 1877

La impresión del trabajo mío que Ud. conoce en el *Journal* de Borchardt se está retrasando de una manera que resulta sorprendente e inexplicable, a pesar de que lo envié ya el 11 de julio y poco después recibí la promesa de que sería impreso lo más rápidamente posible.

6. Véase la correspondencia entre Dedekind y Lipschitz, en Dedekind, *Werke*, tomo III (1932), 469-479, o bien en la traducción castellana en Dedekind (1998), 159-169. [*N. del ed.*]

7. Carta tomada de Grattan-Guinness (1974), 112; por error aparece muy incompleta en Dugac (1976), 231. [*N. del ed.*]

Hoy he recibido, a través de mi viejo amigo Lampe, que desde hace años se ocupa de revisar pruebas del *Journal*, la noticia de que B[orchardt] ha vuelto a retrasar mi nuevo trabajo, alterando con ello el orden previamente fijado, con lo que de nuevo se deja en el aire indeterminadamente la publicación de mi trabajo. También me escribió que, por su parte, está intentando frustrar esas intenciones mediante una hábil maniobra.

Quiero pensar que lo logrará, pero en segundo lugar debo contar con la posibilidad de que no lo consiga; y en tal caso tengo la intención de retirar el trabajo totalmente de las manos del señor B. y hacerlo imprimir en algún otro lugar.

Tengo una pregunta que hacerle en relación con este caso aún *inseguro*, pero posible, y es si estaría Ud. dispuesto eventualmente a recomendar el tratado, que abarca unos dos pliegos, a la imprenta de Vieweg e hijos, empleando su influencia para que la publicación comience enseguida.

La demora por parte del *Journal* me resulta tanto más inexplicable, cuanto que hace poco, durante mi estancia en Berlín, discutí detalladamente el contenido del trabajo con nuestros colegas de más edad, los cuales son tan cercanos al *Journal*, y no encontré en ninguna parte una objeción a su contenido. Por el contrario, a todos les resultó nueva la cuestión y se asombraron mucho del resultado, que también para mí fue inesperado, pero reconociendo plenamente la corrección del procedimiento demostrativo.

Como he dicho, aún *no sé* con seguridad si llegará a resultar necesario que abuse de su amabilidad en la dirección indicada; me gustaría sólo saber de antemano si puedo encargarle la cuestión en su caso.

P.S. ¡Le ruego que considere el contenido de esta carta como algo totalmente confidencial!

29. DEDEKIND A CANTOR:

Brunswick, 14 nov. 1877

En el caso de que retirase Ud. su trabajo del *Journal für Mathematik* y lo quisiera hacer publicar como separata, sin duda estaré dispuesto a esforzarme para que Vieweg lo acepte como

artículo de imprenta. Pero sé de antemano que encontraré dificultades: hace ya años escuché a Vieweg o a sus representantes expresar la mayor oposición a admitir en su imprenta escritos de tan pequeña extensión. El saberlo me movió a hacer imprimir enteramente a mis expensas mi tratado sobre continuidad y números irracionales, a pesar de haberle hecho a Vieweg innumerables favores. Y la distribución ha sido, según parece, extremadamente dejada; es posible que ni siguiera se hayan dado el trabajo (y yo tampoco) de enviar el escrito a ninguna revista crítica, y no he advertido que el escrito se anunciara en los forros de los libros de Vieweg...

Por estas razones, y especialmente a causa de la distribución sumamente pequeña que experimentaría su tratado, suponiendo que Vieweg lo tratara de la misma manera, no puedo aconsejarle demasiado que se aventure a ello. Pero tan pronto como lo decida Ud., haré todo lo posible por obtener para Ud. las condiciones más ventajosas por parte de Vieweg. Resulta muy desagradable que la publicación en el *Journal* se retrase; sin embargo, esta revista garantiza más que ninguna otra la certeza de que un pensamiento reflejado en ella experimentará la distribución más amplia. Por ello, y también en consideración a casos futuros, preferiría aconsejarle que *no* retire su tratado. En todo caso, puede Ud. confiar en mi completa discreción.

30. CANTOR A DEDEKIND, TARJETA POSTAL SIN FECHA:

¡Muchas gracias! Acabo de recibir de Lampe la promesa más segura de que el trabajo en cuestión aparecerá en el próximo número del *Journal*, tal como se había determinado originalmente.[8]

8. De hecho, el artículo aparece publicado *antes* de uno que tiene fecha precedente: quizá ésta fue la «hábil maniobra» de Lampe, amigo de estudios de Cantor. Es más que probable que Kronecker haya estado detrás del abortado retraso, seguramente con la intención de convencer a Cantor del nulo sentido que tienen esos resultados matemáticos «modernos». Conviene añadir que el famoso artículo de Dedekind y Weber, que se considera iniciador de la geometría algebraica moderna, acumuló polvo por espacio de dos años

31. CANTOR A DEDEKIND:

Halle, 29 dic. 1878

No quiero dejar que el año se acabe sin enviarle de nuevo mis mejores deseos; espero que en algún momento sabré por Ud. cómo se encuentra. Entre nosotros todo es alegre: los dos niños se desarrollan a plena satisfacción.[9]

Seguramente habrá llegado a su poder la obra *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali* di *Ulisse Dini*, Pisa 1878. Me parece que ha sido compuesta con conocimiento del asunto y mucha habilidad; para la introducción de los números hace uso de su método. Aunque estoy plenamente de acuerdo con éste, sigo creyendo que es equivalente al que yo sugerí en un trabajo sobre series trigonométricas,[10] y que la distinción formal de magnitudes numéricas de diversos órdenes —mediante la cual *sólo* quise dar expresión a las diferentes maneras en que pueden venir dadas mediante sucesiones infinitas simples (cuyos miembros se aproximan infinitamente *entre sí* al crecer el índice)— no conlleva el peligro de que uno pudiera creer que yo habría pretendido expandir el dominio de los números reales. *Nunca* he tenido en mente tal desacierto, *ni aún de lejos*, y digo expresamente en mi trabajo que cada uno de los números que designo con *c* puede ser considerado igual a un número *b*. Aunque algún otro ha incurrido en ese desacierto, por increíble que esto pueda parecer; no sé si conoce Ud. el *Abriss einer*

---

antes de ser publicado (en el mismo volumen que los *Grundzüge* de Kronecker, y aquí estuvo la causa del retraso; véase Dugac (1976, 252-253). En una carta del 20.01.1882 donde se habla de este asunto, Cantor escribe: «Kronecker hace lo que quiere, Weierstrass se preocupa muy poco de ello, al parecer, y no podemos tomarnos esto a mal ya que está sumamente ocupado a causa de la edición de las obras de Jacobi y de Steiner ... Si tan sólo el señor Kr. quisiera saldar su deuda de gratitud con Dirichlet aproximadamente de la misma manera, ¡pero el asunto no corre prisa! Si dejara la cuestión en manos de algún otro, ya podríamos estar contentos; pero tampoco eso quiere hacerlo» (Cantor a Dedekind, en Dugac 1976, 252). [*N. del ed.*]

9. Dedekind contestó el 31 de dic., como sabemos por la respuesta de Cantor (Dugac 1976, 232), donde éste se alegra mucho de haber retomado la correspondencia «que había quedado paralizada». [*N. del ed.*]

10. Cantor , «Generalización de un teorema de la teoría de series trigonométricas», *Math. Annalen* 5 (1872), en *Abhandlungen*, pp. 92-101. [*N. del ed.*]

Theorie der complexen Functionen und der Thetafunctionen de Thomae; en la segunda edición, p. 9, se encuentran números que son (horribile dictu)[11] más pequeños que todo número real y sin embargo distintos de cero.

Sobre la cuestión de si las variedades continuas con distinto número de dimensiones pueden ser coordinadas entre sí unívoca y continuamente, o más bien sobre el teorema de que esto no es posible, han escrito desde la publicación de mi trabajo sobre teoría de variedades Thomae, Lüroth, Jürgens, y hace unos días Netto en el *Journal* de Borchardt;[12] sin embargo, me parece que la cuestión aún no ha quedado completamente resuelta.

32. CANTOR A DEDEKIND:

Halle, 17 ener. 1879

Creo haber resuelto de la manera más simple y más rigurosa el problema de la representación [Abbildung] unívoca y *continua* de variedades, que había quedado abierta con mis investigaciones; la reduzco al conocido teorema fundamental del análisis según el cual:

(I) una función continua de *una* variable continua t, que para $t = t_0$ toma un valor negativo y para $t = t_1$ un valor positivo, se hace cero al menos una vez en medio de ambos valores.

Los intentos al respecto de Thomae y Netto adolecen de ser incompletos, como quizá haya notado Ud.; así por ejemplo Thomae se apoya en una proposición de Riemann indemostrable *para él* (*Gesammelte Werke*, p. 450, (1): Un multisegmento de menos de n–1 dimensiones, etc., etc.); si bien, como he visto

11. Se trata de órdenes de anulación de una función, y al exponerlos —como un dominio no arquimediano— Thomae se topa de una manera muy notable con las investigaciones de Du Bois-Reymond publicadas poco antes (*Annali di Mat.* IV, 1871). [*N. de Noether y Cavaillès.*]

12. Thomae, «Sätze aus d. Funct. Theorie», *Göttinger Nachrichten* 1878; Lüroth, «Abbildung v. Mannigfaltigk. verschied. Dimens. auf einander, Erlangen», *Phys. Med. Soc., Sitz.-Berichte* 10 (1878); Jürgens, «Ueber eindeutige und stetige Abbildung von Mannigfaltigkeiten», *Tagebl. d. Versamml. Deutsch. Naturforscher und Aertze* in Cassel 1878; Netto, «Zur Mannigfaltigkeitslehre», *Jour. reine und angew. Mathematik* 86 (1879). [*N. de Noether y Cavaillès.*]

ahora con nitidez, dicha proposición de Riemann es en cierto modo equivalente con la que habremos de demostrar, para el caso $\nu = n-1$; pero como $n-1$ es tan general como n, la demostración de Thomae se mueve en cierto modo en círculos.

La demostración general que enseguida aduciré me es conocida desde hace ya tiempo, a saber, más de un año; pero hasta ahora no la consideraba rigurosa y por ello me guardaba de hablar de ella. El descubrimiento que he realizado hace unos días consiste pues, esencialmente, sólo en que es rigurosa. El error en que me encontraba tenía que ver con el hecho de que las relaciones que se plantean en la demostración no son unívocas *por ambos lados*. Pero la *polivocidad* que se nos plantea *no es* dañina, dado que siempre aparece únicamente al pasar de dominios superiores a inferiores.[13]

En lo sucesivo entiendo por esfera de orden p el dominio continuo de orden p que se obtiene de una variedad de $p+1$ dimensiones, con coordenadas $x_1, x_2, \ldots x_{p+1}$, mediante una ecuación:

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \ldots + (x_{p+1} - a_{p+1})^2 = r^2,$$

de manera que, por ejemplo, la circunferencia sobre el plano sería una esfera de orden 1.

Ahora, el teorema a demostrar toma la siguiente forma generalizada:

«Una [variedad] continua M_μ y una [variedad] continua M_ν no se pueden coordinar entre sí, en caso de que $\mu < \nu$, *continuamente* de modo que a cada elemento de M_μ le corresponda un único elemento de M_ν, y a cada elemento de M_ν *uno o más* elementos de M_μ».

13. Como es bien sabido, sin embargo, la proposición es falsa en caso de polivocidad, cosa que ya muestra la curva de Peano. La demostración de arriba está publicada: «Ueber einen Satz aus d. Theorie d. stetigen Mannigfaltigkeiten», *Götting. Nachrichten*, 1879 (*Gesammelte Abhandlungen*, p. 134). [*N. de Noether y Cavaillès.*] [Zermelo comenta en p. 138: «Es totalmente objetable el recurso a funciones continuas infinitamente polívocas, en cuyo caso ... ni siquiera es válido el teorema fundamental» del valor intermedio. La primera demostración rigurosa del teorema de invariancia de la dimensión fue la de Brouwer en 1911.]

El teorema es inmediatamente claro para el caso $\nu = 1$. A fin de demostrarlo en general suponemos que es válido para $\nu = n-1$ y mostramos que entonces es verdadero también para $\nu = n$.

Para ello suponemos dada una correspondencia continua de una M_μ con una M_n, donde $\mu < n$, de modo que en la transición de M_μ a M_n reine la *univocidad*; y mostramos que a esta suposición le subyace una contradicción interna, o más bien se contradice el teorema fundamental I aducido más arriba.

Sean *a* y *b* dos puntos interiores de M_μ, *A* y *B* los puntos correspondientes de M_n.

En torno a *A* como punto medio construimos en M_n una esfera de orden $n-1$, E_{n-1}, que ha de ser tan pequeña como para que el punto *B* quede fuera del espacio delimitado por ella.

En torno a *a* como punto medio construimos igualmente en M_μ una esfera de orden $\mu-1$, $E_{\mu-1}$, que será lo bastante pequeña para que 1) el punto *b* quede fuera de ella, y también

2) que el dominio continuo de orden $\mu-1$, $D_{\mu-1}$, correspondiente a esta esfera en M_n, caiga totalmente en el interior del espacio delimitado por la esfera E_{n-1}, lo cual puede lograrse a causa de la continuidad de la correspondencia en el entorno de los puntos *a* y *A*.

Sea *z* un punto cualquiera de $E_{\mu-1}$, ζ el punto correspondiente de $D_{\mu-1}$; tiramos el rayo recto $A\zeta$, y prolongado en esta dirección encuentra a la esfera E_{n-1} en un único punto *Z* bien determinado.

Así pues, *por medio de esta construcción* a cada punto z de $E_{\mu-1}$ le corresponde *un* punto *Z* de E_{n-1}, el cual varía continuamente con *z*.

Pero de esta manera el punto *Z* no puede alcanzar todos los puntos de E_{n-1}, *ya que esto chocaría con nuestra proposición para el caso* $\nu = n-1$ *que se supone demostrado.*

Por ello concluimos con certeza que existen puntos *P* de la esfera E_{n-1} que no son alcanzados por el punto *Z*; si se tira el rayo *AP* de *A* a uno de tales puntos *P*, éste *no* corta al dominio $D_{\mu-1}$.

Si ahora unimos *P* con el punto *B*, que cae fuera de E_{n-1}, por medio de una curva continua que recorra el espacio M_n, obtenemos

(II) una línea continua compuesta *APB*, *que no tiene ningún punto en común con el dominio* $D_{\mu-1}$.

De acuerdo con la correspondencia continua que estamos presuponiendo entre M_μ y M_n, a esta línea le corresponden una o más curvas en M_μ, que marchan continuamente de *a* a *b*, y que con ello

(III) a causa del teorema fundamental I, *deben necesariamente cortar* a la esfera $E_{\mu-1}$ *al menos una vez.*

Estos dos hechos II y III se contradicen entre sí; así pues, el supuesto de una relación continua entre M_μ y M_ν es incorrecto, y nuestro teorema está demostrado para el caso $\nu = n$.

Estoy pensando en enviar esta demostración a los *Anzeigen* de Gotinga, ya que la Academia de Gotinga me ha nombrado miembro correspondiente hace poco, y dado que Thomae publicó su demostración allí; por ello me gustaría mucho escuchar antes su opinión sobre esta cuestión.

33. DEDEKIND A CANTOR:

Brunswick, 19 ener. 1879

He estudiado con atención su demostración, y sólo he encontrado una pequeñez en ella, la cual podría causar dudas. Una vez que ha construido en torno al punto *A* de M_n una esfera E_{n-1}, y en torno al punto a de M_μ una esfera $E_{\mu-1}$, cuya imagen en M_n es designada con $D_{\mu-1}$, establece Ud. sobre esta base una aplicación de $E_{\mu-1}$ en E_{n-1}: al punto *z* de $E_{\mu-1}$ le corresponde un cierto punto ζ de $D_{\mu-1}$, y la intersección *Z* del rayo $A\zeta$ con E_{n-1} se considera como una nueva imagen de *z*. Pero ahora cabe pensar que ζ coincida con *A*, ya que Ud. admite que *varios* puntos de M_μ correspondan a un mismo punto de M_n; en tal caso la imagen *Z* sería en general *indeterminada*. La dificultad resultante es obviamente fácil de superar si el número de los puntos *a'* en M_μ que corresponden a un mismo punto *A* en M_n es *finito*, ya que basta con elegir el radio de la esfera $E_{\mu-1}$ tan pequeño como para que los restantes puntos *a'* queden más allá. Pero si el número de los puntos *a'* es infinitamente grande, de momento veo en la mencionada circunstancia una verdadera dificultad, y ésta se reproduce además en un segundo lugar de su demostración. Pues dice Ud. que a la línea *APB* le corresponderán una o más líneas en M_μ, que llevan continuamente de *a* a *b*; en mi opinión esto exigiría una explicación y

fundamentación más detallada *aún en el caso* de que B sea la imagen de sólo uno o de sólo una cantidad *finita* de puntos b' en M_μ; pero si son infinitos los puntos b' de M_μ que tienen la misma imagen B en M_n, la existencia de una línea que lleva continuamente de a a b, cuya imagen debería ser la línea APB, se hace aún más dudosa. Por lo demás, *creo* que la proposición sigue siendo verdadera si se admite el supuesto de que cada punto de M_n pueda ser la imagen de infinitos puntos distintos de M_μ. Quizá logre Ud. superar las dos dificultades mencionadas en un momento. En una publicación me parece deseable que los nombres o expresiones técnicas de la teoría de variedades (dicho sea de paso, yo daría preferencia sin dudarlo, por su brevedad, a la palabra «Gebiet» [dominio] que es también riemanniana, antes que a la pesada palabra «Mannigfaltigkeit» [variedad, conjunto]) fueran definidos con toda precisión; sería de gran mérito que toda esta «teoría de dominios» se expusiera *ab ovo*,[14] sin recurrir a la intuición geométrica, y al hacerlo sería necesario por ejemplo definir con nitidez y determinar plenamente el concepto de una línea que lleva continuamente del punto a al punto b dentro del dominio D. Las definiciones de Netto (cuyo tratado me gusta mucho, y cuya demostración, según creo, puede hacerse plenamente adecuada con algunas modificaciones) contienen una buena base para ello, pero me parecen susceptibles de simplificación y también de ser completadas. No me permitiría realizar un juicio así, si no me hubiera ocupado muy ampliamente de tales cuestiones hace muchos años, cuando todavía pretendía editar las lecciones de Dirichlet sobre el potencial y de paso fundamentar con más rigor el llamado principio de Dirichlet.[15] Tengo unas cuantas definiciones que me parecen dar un fundamento muy bueno, pero más tarde dejé a un lado todo ese asunto, ya que la adaptación de la teoría de números de Dirichlet exigió toda mi aten-

14. «Desde el huevo», desde el mismo inicio. [*N. del ed.*]

15. Esto sucedía hacia 1865: la cuestión del principio de Dirichlet era clave en conexión con la teoría de funciones de Riemann, muy atacada entonces por los matemáticos de Berlín; finalmente lo demostraría Hilbert en 1904. Las «definiciones» que menciona el texto aparecen en el fragmento de Dedekind «Allgemeine Sätze über Räume» (*Werke*, t. II, 1931, p. 352), traducido en Dedekind (1998), 156-157. [*N. del ed.*]

ción,[16] y en este momento sólo podría ofrecer algo incompleto. Pero su comunicación me ha interesado en gran manera, cosa que apenas tendré necesidad de asegurarle, y expresándole mis más sinceras gracias por ella, ...

34. CANTOR A DEDEKIND, TARJETA POSTAL, 20.01.1879:

En mi carta enviada el 17 del presente encuentro un punto a mejorar, aunque *no es considerable*.

Es *mejor* comenzar con dos puntos A y B *de* M_n, a los que corresponden puntos interiores de M_μ.

Sea *a uno* de los puntos interiores que corresponden al punto A, y sean b, b', b'', ... *todos* los puntos correspondientes al punto B. La esfera $E_{\mu-1}$ en torno a a como centro se tomará tan pequeña como para que tanto $D_{\mu-1}$ caiga en el interior de E_{n-1}, como también que *todos los puntos* b, b', b'', ... *caigan fuera de* $E_{\mu-1}$. Esto puede lograrse gracias a la continuidad, *la cual impide* que los puntos b, b', b'', ... se aproximen infinitamente al punto a.

Ahora no debería ya causar ninguna duda que *una* curva correspondiente a la línea APB en M_μ conduce de a a *uno* de los puntos b, b', b'', ..., y que al hacerlo debe cortar a la esfera $E_{\mu-1}$.

Terminada esta tarjeta, recibo su carta, por la que le doy cumplidas gracias. La respuesta vendrá luego, ya que debo asistir a una reunión.

35. CANTOR A DEDEKIND, TARJETA POSTAL, 21.01.1879:

Ayer tarde, cuando estaba a punto de enviarle mi tarjeta recién terminada, sólo tuve tiempo de añadir un anuncio de la recepción de su carta. Una de sus objeciones la he anticipado en aquella tarjeta; en lo que respecta a la otra, según la cual el dominio $D_{\mu-1}$ puede contener al punto A, me parece que de

16. Se refiere a la segunda edición (1871), para la cual Dedekind preparó un apéndice conteniendo la primera versión de su famosa teoría de ideales. [*N. del ed.*]

hecho plantea una dificultad que por el momento no estoy en condiciones de superar completamente, pero que quizá podría evitarse eligiendo adecuadamente el punto A, para el que hay un espacio de juego tan grande. En todo caso era mi intención admitir la polivocidad en la transición de la variedad superior a la inferior *con tanta generalidad*, que a un punto de M_n le pudieran corresponder *infinitos puntos* de M_μ; por ello no me resultaría *nada correcto* el *limitar* este supuesto a fin de salvar mi demostración. En todo caso, sólo pienso en una publicación *para el caso* de que lograse despachar también este punto.

36. CANTOR A DEDEKIND:

Berlín, 15 oct. 1879

Mi familia se encuentra, gracias a Dios, perfectamente, el niño de sólo siete meses se desarrolla espléndidamente.

Estas vacaciones estuvimos cuatro semanas en Friedrichsrode; esta vez no he llegado a viajar solo. Desde hace un tiempo estamos en Berlín para visitar a los familiares, y permaneceremos aquí todavía una semana, luego volvemos a Halle.

Aquí no tengo mucha interacción científica, mis amigos de otros tiempos se han dispersado por el mundo, y los viejos señores no están muy accesibles.

Kronecker, a quien visité hace unos días, ha permanecido en Italia varios meses por placer y ha llegado hasta Sicilia. Da una impresión muy vigorosa.

Kummer está muy bien, aunque según parece se entrega demasiado a la pereza de la edad. Weierstrass y Borchardt están aún en el campo.

¿Cómo le va a Ud., y hasta dónde ha llegado con la segunda parte de la segunda edición de su teoría de números?[17]

17. Se refiere a los nuevos suplementos, incluyendo una nueva versión de la teoría de ideales. [*N. del ed.*]

37. CANTOR A DEDEKIND:

Halle, 22 dic. 1879

Habrá recibido Ud. hace algún tiempo una pequeña nota mía[18] sobre una demostración de un tal señor Appell. Quizá le interese la siguiente aclaración. Appell emplea el siguiente teorema: «si $f(n, x)$ se hace, para cada valor especial de $x \geq \alpha$ y $\leq \beta$, ∞ pequeño para $n = \infty$, y si $f(n, x)$ es una función continua de x, y B_n el máximo absoluto de ésta, entonces Lim $B_n = 0$ para $n = \infty$». Que esta proposición es (en general) falsa, lo muestra el siguiente ejemplo:

$$f(n, x) = e^{-\left(\frac{nx}{1-x} + \frac{1-x}{nx}\right)}, \text{ para } 0 < x < 1,$$

bajo las condiciones adicionales $f(n, 0) = f(n, 1) = 0$. Esta función es continua en x para $0 \leq x \leq 1$; además, para todo x especial que sea ≥ 0 y ≤ 1: Lim $f(n, x) = 0$ para $n = \infty$. El máximo de $f(n, x)$ es, para cada n especial, $= e^{-2}$, como es fácil ver, por tanto: $B_n = e^{-2}$; *por tanto aquí* B_n *no se hace* ∞ *pequeño*. Que en el caso

$$f(n, x) = a_n \sin nx + b_n \cos nx, \; B_n$$

se hace ∞ pequeño al crecer n, *se deduce* de mi demostración, pero no debe ser *presupuesto*, porque entonces la demostración se convierte en un *circulus vitiosus*, como de hecho sucede con Appell.

Me han gustado mucho los resultados sobre teoría de funciones publicados por Ém[ile] Picard en los últimos meses en los *comptes rendus* [de la Academia de París]. Si este joven matemático continúa de esta manera, podemos esperar de él algunas cosas hermosas.

Según veo con posterioridad, el ejemplo

$$f(n, x) = \frac{nx\,(1-x)}{n^2x^2 + (1-x)^2}$$

$$\text{para } 0 \leqq x \leqq 1,$$

¡satisface los mismos objetivos que el de arriba, y es más simple!

18. «Fernere Bemerkungen über trigonometrische Reihen», *Math. Annalen*, XVI (1880) (*Ges. Abhandlungen*, p. 104). [*N. de Noether y Cavaillès.*]

38. CANTOR A DEDEKIND:[19]

Berlín, 7 abr. 1882

La cuestión de la cátedra en Halle ha quedado decidida hace poco, como quizá sepa Ud. ya; A. Wangerin vendrá en el otoño de este año a Halle. Desde el punto de vista personal y del propio asunto he quedado satisfecho con esta resolución, una vez que tuve que resignarme a ver que mi verdadero deseo, verle a Ud. trasladado a la universidad, no podía llegar a realizarse. La circunstancia de que no hayamos vuelto a tener la palabra en relación a este nombramiento, ha conducido necesariamente a una disputa [Auseinandersetzung] entre Kr[onecker] y yo, que sin embargo se mantuvo en lo puramente objetivo, porque yo evité por principio entrar en el terreno de lo personal, y tuvo como resultado que se me honró con garantías de amistad de un modo algo excesivo.

¿No será posible que le veamos aquí por Pascua?

Mis vacaciones en Berlín las pasaré como siempre realizando trabajos a los que el semestre no me permite entregarme. En particular me permito hacerle notar lo siguiente, aunque quizá ya lo haya advertido Ud. mismo.

Si se tiene un dominio n-dimensional y continuamente conexo A, y en él un conjunto de puntos (M_ν) distribuido densamente, pero *enumerable*, entonces para $n \geq 2$ el dominio **A** que resta, tras eliminar de A el conjunto (M_ν), es aún continuamente conexo, en el sentido de que dos puntos cualesquiera N y N' del mismo pueden ser conectados por una cantidad infinita de líneas continuas, definibles analíticamente, que discurren en el interior de dicho dominio **A** y en las que por tanto no cae ningún punto del conjunto (M_ν). El *movimiento* es pues posible también, en un sentido preciso, en tales espacios **A**.[20]

19. Entre la carta anterior, n.° 37, y ésta de 1882 hubo una larga serie de cartas que tienen que ver con el asunto de la cátedra que quedó vacante en Halle por la muerte de Heine en 1881 (véase Dugac 1976, 239-255). El lector encontrará alguna referencia al asunto en las cartas que siguen y en las notas. [*N. del ed.*]

20. Teorema publicado en una formulación similar en «Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten» § 3, *Math. Ann.* XX (*Ges. Abhandlungen*, p. 154). [*N. de Noether y Cavaillès.*]

La validez general de esa proposición se reconoce del modo más simple a partir de mi teorema que dice que, dada una sucesión de magnitudes reales:

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots,$$

en todo intervalo (α, β) se dan magnitudes η que no son iguales a ninguno de los ω_ν. De hecho supongamos que $n = 2$ y A es plano, entonces se puede primero conectar los puntos N, N' mediante una línea continua L sin preocuparse de (M_ν), y tomar sobre esta línea una cantidad finita de puntos $N_1, N_2, \ldots N_k$ no pertenecientes a (M_ν) de tal manera, que los segmentos NN_1, $N_1N_2, \ldots N_kN'$ caigan enteramente en el interior de A, y ahora *reemplazar* esos segmentos por arcos de círculo con los mismos extremos, en los cuales no caiga ningún punto de (M_ν).

Tomemos por ejemplo el segmento NN_1; por ambos puntos N y N_1 pasa un haz simplemente infinito de círculos, cuyos centros están sobre una recta g y pueden ser fijados sobre ésta mediante una coordenada u. Es posible determinar para u un intervalo (α, β) de modo que todos los valores de u dentro del mismo correspondan a arcos de círculo que discurren enteramente en el interior de A. Aquellos arcos del haz que además de pasar por N y N_1 pasan también por los puntos

$$M_1, M_2, \ldots, M_\nu, \ldots,$$

se corresponden con valores de u que podemos designar mediante:

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots$$

Tomemos ahora en el interior de (α, β) un valor η que no es igual a ningún ω_ν, y entonces obtenemos mediante la condición $u = \eta$ un arco de círculo que conecta los puntos N y N_1, cae enteramente en A, y sobre el cual *no cae ninguno de los puntos* M_ν, c. q. d.

39. CANTOR A DEDEKIND:

Berlín, 15 abril 1882

Me hubiera gustado recibir su respuesta al contenido matemático de mi última carta, suponiendo que haya llegado a su posesión, cosa que pongo en duda.[21]

Mi interés por este asunto es el siguiente: tras las investigaciones y resultados sobre el concepto de número irracional y su naturaleza ideal en el sentido de Kummer, a los que ambos llegamos hace mucho tiempo de manera independiente, está claro que al formar el concepto de espacio no existe ninguna necesidad interna de representárselo continuo por todas partes; Ud. lo hace notar expresamente en su escrito sobre la continuidad. Por ello resultaba natural deducir la continuidad del espacio de razones externas, principalmente del hecho [Factum] de la variación continua de lugar, esto es, del movimiento, y ésta fue en realidad mi opinión por largo tiempo.

Pero esa opinión queda sin validez debido al conocimiento de que en un espacio tan sumamente discontinuo como el que he designado por **A** en mi escrito, son posibles variaciones continuas de lugar de cada punto a otro punto cualquiera. Y por tanto, ¿cabría pensar en una mecánica modificada, la cual fuera válida para espacios **A**?

40. CANTOR A DEDEKIND:

Halle, 15 sept. 1882

Aunque sea una gran molestia, le pido que la soporte amistosamente, si le pido que pregunte en la Media Luna sobre la posibilidad de tener un cuartito para mí el domingo antes de mediodía, y en caso de que así fuera que confirme el alquiler en mi lugar. Si no quedara nada libre en esa casa de huéspedes, no

21. Es obvio que las cartas enviadas por Cantor este año quedaron en su mayoría sin contestar. Un factor importante en este sentido es que la madre de Dedekind estaba enferma, y murió de hecho en octubre (véase el pésame de Cantor y su mujer, 14.10.1882, en Dugac 1976, 257). Quizá en estas condiciones la insistencia de Cantor por discutir los asuntos matemáticos *de su interés* resultó molesta a Dedekind. [*N. del ed.*]

se pierde nada, encontraré alojamiento en algún otro lugar. En todo caso, tras llegar a Eisenach (11 horas 25 min.) y tras recoger en la estación de tren la tarjeta de miembro de la Reunión de Científicos [Naturforscherversammlung], me dirigiré enseguida a la Media Luna y veré si tienen lo que deseo.

Aparte [véase abajo] incluyo un intento de formular el problema que me interesa desde hace mucho tiempo, qué se ha de entender por un *continuo*; por favor, júzguelo con indulgencia; si no le parece inútil, podemos discutir de palabra sobre este asunto.

Un intento de generalizar su concepto de cortadura y emplearlo para una definición general del continuo no quiso darme frutos. Por el contrario, mi punto de partida en las «sucesiones fundamentales» enumerables (ahora llamo así a las sucesiones en las que los elementos se aproximan infinitamente *entre sí*) se acomodó sin violencia a mi intención.

Para variedades de puntos lineales, esto es, contenidas en una recta, puedo mostrar fácilmente con ayuda de mis teoremas que sólo un intervalo completo satisface las condiciones A y B [ver abajo].[22]

Similarmente debería ser posible mostrar, para conjuntos de puntos que yacen en un plano, que si A y B se cumplen en ellos, entonces o bien son segmentos de línea cerrados, o bien superficies limitadas por tales segmentos.

P.S. Un conjunto enumerable no debería ser concebible como continuo bajo ninguna ordenación que se le dé. Por el contrario, es probable que todo conjunto no enumerable se pueda siempre contemplar como un continuo bajo ciertas ordenaciones.[23]

I.[24] Sea M *cualquier* conjunto [Mannigfaltigkeit] bien definido formado por infinitos elementos m, n, p.

22. Suponiendo que se entienda por $[m,n]$ la distancia entre los dos puntos m, n. [*N. del a.*]

23. De nuevo Cantor está razonando aquí bajo el supuesto de que su Hipótesis del Continuo es verdadera. [*N. del ed.*]

24. Hoja aparte, a la que se refiere C. al comienzo de esta carta y de la siguiente. [*N. de Noether y Cavaillès.*] El texto es llamativo, porque por prime-

A toda combinación de dos elementos m y n del conjunto se le asignará de una manera determinada (*pero completamente arbitraria*) un número real positivo (*distinto de cero*), que designaremos con $[m,n]$; se puede considerar en cierto modo como función de la combinación m, n. Inversamente, con esta función $[m,n]$ se establecen ciertas relaciones entre los elementos de M, de manera que m, n, p ..., que se encontraban antes uno al lado del otro sin relaciones entre sí, aparecen ahora puestos en un cierto orden O; llamaremos a este ordenamiento O el orden operado por la función $[m,n]$. Toda otra función $[m,n]'$, en la medida que sea diferente de la $[m,n]$ en al menos un miembro, opera un orden distinto O' *sobre la misma variedad* M.

II. M será llamado un *continuo* con relación al ordenamiento operado por la función $[m,n]$, si se cumplen las dos condiciones siguientes:

A: Si m, n son dos elementos cualesquiera de M y ε es una cantidad dada arbitraria, se puede indicar siempre una cantidad finita de elementos $m_1, m_2, \ldots m_k$ de M, de manera que:

$$[m,m_1], [m_1,m_2] \ldots [m_{k-1},m_k], [m_k,n]$$

sean todos menores que ε.

B: Si $m_1, m_2, \ldots, m_\nu$ es un conjunto infinito enumerable cualquiera de elementos de M con la característica de que:

$$\lim [m_{\nu+\mu},m_\nu] = 0 \qquad \text{para } \nu = \infty,$$

entonces existe siempre *un y sólo un* elemento m de M, de manera que

$$\lim [m,m_\nu] = 0 \qquad \text{para } \nu = \infty.$$

III. De ahí se deduce claramente que un mismo conjunto M puede ser un continuo en relación a *un* ordenamiento O, y un discontinuo en relación a *otro* ordenamiento O'. Así, un cua-

---

ra vez Cantor da el paso de iniciar sus consideraciones con conjuntos abstractos, y *luego* definir estructuras sobre ellos; el estilo abstracto de estas consideraciones no tiene precedentes en su obra y sus cartas. [*N. del ed.*]

drado incluyendo su frontera es un continuo en relación a aquel ordenamiento bajo el cual $[m,n]$ es la distancia en línea recta de los puntos m y n; por el contrario, el mismo cuadrado es un discontinuo en relación al ordenamiento que se obtiene, cuando se establece una aplicación unívoca por ambos lados y completa entre aquél y un *segmento*, de manera que a los puntos m, n, p ... les correspondan los puntos m', n', p' ... del segmento, y se tome $[m,n]$ igual a la distancia de los dos puntos correspondientes m', n'.

Halle, 15 sept. 82.

41. CANTOR A DEDEKIND:

Halle, 30 sept. 1882

...Tras mi partida de Eisenach pasó Ud. todavía un par de días deliciosos con nuestros amigos y colegas; para mí, el corto tiempo de nuestra estancia común allí fue verdaderamente satisfactorio, un momento que sé que recordaré a menudo.

...Si cae en sus manos la hojita sobre el concepto del continuo, no olvide tachar el último pasaje, ya que se basa en un error.

Obviamente el cuadrado con el ordenamiento en el que allí lo concibo es un continuo, si bien un continuo de sólo una dimensión. Por el contrario, sería fácil establecer un ordenamiento distinto, con el que el cuadrado deviene un discontinuo.

Los pensamientos fundamentales son la idea de que sólo se puede hablar de un continuo *en relación* a un ordenamiento determinado de los elementos, operado por una función $[m,n]$; y además las *dos* características del continuo indicadas *bajo A* y *B*, con relación a un orden dado. Espero que próximamente encontraré tiempo para expandir estos pensamientos y quizá publicarlos.

42. CANTOR A DEDEKIND, TARJETA POSTAL DEL 2.10.1882:

A las condiciones *A* y *B* del continuo *en relación* a un *ordenamiento dado O* se les debe añadir una *C*, según descubro, que en general no es de ninguna manera una consecuencia de las anteriores; a saber:

C: (Inversa de *B*.) Si m es un elemento de M, y m_ν un conjunto infinito enumerable de sus elementos, de manera que:

$$\lim\,[m,m_\nu] = 0 \qquad \text{para } \nu = \infty,$$

entonces también debe ser siempre: $\lim\,[m_{\nu+\mu},m_\nu] = 0$, para $\nu = \infty$, cualquiera que sea μ.

Con esto debería quedar agotado todo lo que puede exigirse de un continuo.

43. CANTOR A DEDEKIND:

Halle, 5 nov. 1882

La circunstancia de no haber tenido noticias de Ud. por tanto tiempo, y en particular tampoco la menor noticia desde la desgraciada pérdida [de su madre],[25] me hace temer que Ud. mismo pueda no estar demasiado bien, y por ello comprenderá Ud. que me permita rogarle que me tranquilice en ese sentido al menos con unas líneas.

Ese vacío es para mí tanto más sensible, por haberme acostumbrado desde hace una serie de años a someter a su maduro juicio mis experiencias matemáticas íntimas [inneren mathematischen Erlebnisse], y precisamente desde nuestros recientes encuentros en Harzburg y Eisenach, Dios todopoderoso me ha concedido alcanzar las aclaraciones más notables e inesperadas en la teoría de conjuntos y la teoría de números, o, más bien, que encontrara aquello que ha fermentado en mí durante años y que he estado buscando tanto tiempo. (No se trata de la definición general del continuo de puntos, de la que hablamos y en la que creo haber avanzado, sino de algo mucho más general y por tanto más importante.)

25. Véase la nota al pie de la carta del 15.04.1882. El bienintencionado interés de Cantor viene seguido de una larga explicación de las nuevas ideas matemáticas que quiere publicar, lo cual probablemente no haría sino confirmar las malas impresiones que pudiera tener Dedekind. Nótese cómo en toda la correspondencia no hay muestras de interés por las investigaciones de Dedekind, más allá de expresiones formales, y cómo el papel de éste —nunca agradecido públicamente— es sobre todo el de un corrector de ideas previamente a la publicación. En todo caso, la carta es sumamente interesante. [*N. del ed.*]

Recordará Ud. que en Harzburg le dije que no me resultaba posible demostrar la siguiente proposición:

«Si M' es parte de una variedad M, y M'' parte de M', y si M y M'' admiten ser coordinadas entre sí unívocamente por ambas partes, esto es, si M y M'' tienen la misma potencia, entonces también M' tiene la misma potencia que M y M''».

He encontrado al fin la fuente de este teorema y puedo demostrarlo rigurosamente y con la debida generalidad, con lo que se llena una laguna importante en la teoría de conjuntos.[26]

Lo consigo a través de una extensión natural, o prosecución, de la serie de los números reales enteros, la cual me conduce sucesivamente y con la mayor seguridad a las potencias crecientes, cuya definición precisa me había faltado hasta ahora, fuera de la primera potencia dada por la serie numérica 1, 2, 3, ... ν, ...

Llamo a la serie 1, 2, 3, ... ν, ... primera verdadera clase numérica entera, y la designo mediante (ν).

Accedo a la *segunda* verdadera clase numérica como sigue: así como el número ν es la expresión de una cierta cantidad de repeticiones de la unidad y de su reunión, creo primeramente un nuevo número ω,[27] que será la expresión de que toda la colección (ν) está dada; puedo pensar ω como límite de los números ν, si con esto no se pretende indicar nada más que ω es el primer número creado tras *todos* los ν, esto es, el *primero* que ha de ser llamado mayor que todos los ν.

Si aplico a ω la adición de una unidad, igual que antes a ν, obtengo un nuevo número ω+1, el cual expresa que primero se

26. Como indicamos en otros lugares, esto no era cierto, según reconoció el mismo Cantor en las *Contribuciones* de 1895 (al final del § 2: *Abhandlungen*, 285): los ordinales transfinitos y las clases numéricas no bastaron para demostrar el teorema de Cantor-Bernstein. Dedekind sí pudo demostrarlo en 1887, pero desgraciadamente no se lo quiso comunicar a Cantor (*cf.* Dedekind (1998), 155, 63, y nota 20 en 186). Lo cual confirma que, por razones que no somos capaces de reconstruir plenamente, se había cansado definitivamente de ejercer el papel que tuvo en los años 1870 respecto a Cantor, sus publicaciones y el desarrollo de sus ideas. [*N. del ed.*]

27. Cantor emplea aquí el modo de hablar de Dedekind, quien siempre había considerado a los números «creaciones libres» de la mente humana. También habla así en las últimas secciones de los *Fundamentos*. Más abajo, el término «Gedankending», objeto mental, es también típico de Dedekind. [*N. del ed.*]

ha puesto ω, *luego* se ha añadido la unidad y se ha reunido con ω en un nuevo número. Llamo a la transición de un número ν o ω al *inmediatamente* siguiente el *primer momento de generación*; por el contrario, la transición de un conjunto sucesivo de números enteros, que no tiene ningún máximo, al inmediatamente mayor que todos ellos, la llamo el *segundo* momento de generación.

La formación del número ω sucede pues gracias al *segundo* momento de generación, la del número $\omega+1$ gracias al *primero*.

Si ahora se aplican repetidamente ambos momentos de generación, se llega a una extensión de nuestra serie numérica que avanza en sucesión determinada:

$$1, 2, 3, \ldots \nu, \ldots \omega, \omega+1, \ldots \omega+\nu, \ldots, 2\omega, 2\omega+1, \ldots, \mu\omega+\nu, \ldots$$
$$\ldots \lambda\omega^2+\mu\omega+\nu, \ldots, \sigma\omega^k+\rho\omega^{k-1} \ldots+\mu\omega+\nu, \ldots$$
$$\ldots \text{ etc. etc. etc.}$$

La primera impresión que esta sucesión causará en Ud. será que uno no ve cómo se podría llegar al continuarla a algún tipo de clausura, cosa que sin embargo sería necesaria si es que aquello debe suministrarnos una *nueva* potencia *determinada*, y concretamente la potencia de la *segunda* clase, inmediatamente siguiente a la potencia de la primera clase.

Para lograr esa clausura, se añade a los dos momentos de generación definidos arriba un *tercer* momento, al cual llamo *momento de limitación*, el cual consiste en el requisito de que sólo se emprenderá la creación de un nuevo número entero con ayuda de uno de los dos otros momentos, si la totalidad de los números obtenidos previamente *es enumerable* mediante una clase numérica conocida y disponible ya en toda su extensión.

Por este camino, al observar estos tres momentos se pueden alcanzar con la mayor seguridad clases numéricas siempre nuevas, y sus potencias respectivas, y los nuevos números obtenidos de esta manera gozan siempre de la misma determinación concreta y exactamente la misma realidad que los antiguos. Por tanto no sé qué podría disuadirnos de la actividad de formar nuevos números enteros, siempre que se muestre que la introducción de una nueva entre estas innumerables clases numé-

ricas se ha vuelto deseable o incluso imprescindible para el avance de las ciencias. Y esto último me parece ser el caso en la teoría de conjuntos [Mannigfaltigkeitslehre], y aún podría serlo mucho más allá; pues *al menos yo* no puedo seguir adelante sin esta extensión, pero *con* ella consigo muchas cosas bien inesperadas.

Naturalmente, en primer lugar debemos detenernos en la *segunda* clase numérica, que llamo (α), y que contiene al inicio la primera (ν). Según lo anterior, (α) está caracterizada porque los números $1, 2, 3, \ldots \omega, \omega+1, \ldots, \omega^2, \ldots$ *que preceden* a un determinado α forman *siempre* un conjunto que (al margen de su ordenamiento natural) es enumerable en la *primera* clase.

Ahora se puede demostrar con pleno rigor que la *propia colección* (α) *no es* enumerable en la primera clase.

La colección de números (α) tiene pues una potencia *distinta* de (ν), y concretamente la *inmediatamente* mayor; pues estoy en condiciones de demostrar rigurosamente la siguiente proposición:

«Si (α') es cualquier parte de (α), entonces *o bien* (α') es finito, *o* es enumerable en la primera clase, *o se puede* coordinar (α') biunívocamente con la propia colección (α), esto es, (α') es *enumerable* en la *segunda* clase; quartum non datur».

Además creo poder demostrar que la colección de nuestros números *reales*, racionales *e* irracionales, se puede relacionar unívocamente con (α), con lo cual, teniendo en cuenta el teorema anterior, queda demostrado el *teorema de las dos clases* para [conjuntos] infinitos lineales (y para los que son reducibles a estos mediante aplicación).[28]

Quizá se asombre Ud. de mi atrevimiento al llamar a los objetos $\omega, \omega+1, \ldots, \alpha, \ldots$ números *enteros*, y aun *verdaderos* números *enteros* de la segunda clase, cuando previamente, allí donde me he servido de ellos (en los [*Math.*] *Annalen*, t. 17, 20 y 21), los había llamado modestamente «símbolos de infinitud».

28. Se refiere, obviamente, a la HC. Una vez más, los deseos de demostrar esta hipótesis clave de Cantor se anteponen a la consideración crítica: Cantor puso enseguida esperanzas en poder demostrar la HC por esta vía, y siguió trabajando en ello hasta el artículo de la disputa con Mittag-Leffler en 1885, pero tampoco este camino dio frutos. [*N. del ed.*]

Pero esta libertad mía se explica por la observación de que entre los objetos mentales [Gedankendinge] α, que llamo verdaderos números enteros de la *segunda* clase, se dan relaciones que se puede reducir a las operaciones [aritméticas] básicas.

Desde luego las leyes que reinan entre ellos son esencialmente distintas y más complicadas, más difíciles de encontrar por inducción, que las de nuestra teoría de números en relación a los viejos números. Ya para la adición se encuentra que la ley *conmutativa* no subsiste en general; en general $\alpha+\beta$ *no es* $=\beta+\alpha$.

Es fácil reconocer esto, ya que encontramos que $1+\omega = \omega$, mientras que $\omega+1$ es bien distinto de ω.

La sustracción se define, si $\beta<\alpha$, por medio de la ecuación:

$$\alpha + (\beta-\alpha) = \beta,$$

pero *no* mediante la ecuación: $(\beta-\alpha) + \alpha = \beta$, que en general no resulta resoluble en $(\beta-\alpha)$. Si α es multiplicando y β multiplicador, entonces existe en (α) un determinado número que es el producto:

$$\alpha\beta;$$

mas también aquí se encuentra que en general $\beta\alpha$ *es diferente de* $\alpha\beta$.

Sin embargo, la ley asociativa es válida tanto para la adición como para la multiplicación en la segunda clase, tenemos:

$$\alpha + (\beta+\gamma) = (\alpha+\beta) + \gamma$$
$$\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma) = (\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma.$$

Del principio distributivo vale sólo una mitad, tenemos:

$$(\alpha+\beta)\,\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma.$$

Entre los números (α) encontramos que existe una distinción natural entre aquellos números α formados con ayuda del *primer* momento de generación, que por tanto tienen un *inmediato* predecesor, al cual llamo α_{-1} (es distinto en general de $\alpha-1$, porque $\alpha-1 = \alpha$ para $\alpha \geq \omega$); y aquellos números α que no tienen un inmediato predecesor en la serie, para los cuales α_{-1} resulta carente de significado. Dentro del primer tipo se distin-

guen del resto los no descomponibles, que bien podemos llamar números primos.*[29]

Hasta donde puedo ver, es relativamente fácil determinar nuestros números irracionales finitos con la ayuda de los números α, cosa que quiero aún investigar.

Entiendo por P la colección de los números contenidos en la fórmula:

$$z = \alpha_1 \cdot \frac{1}{3} + \alpha_2 \cdot \frac{1}{3^2} + \ldots + \alpha_\nu \cdot \frac{1}{3^\nu} + \ldots,$$

en la cual α_ν sólo recibe los valores 0 y 2.

P tiene entonces las dos propiedades:

1) $P \equiv P'$
2) P no es denso en ningún intervalo.

Problema. Sea M un conjunto de elementos cualquiera; sea M_1 una parte propia de M, y M_2 una parte propia de M_1; suponemos que hay una relación unívoca por ambas partes entre M

* Me parece (aunque todavía no estoy seguro) que todo número α se puede representar de una única manera bajo la siguiente forma:

$$\alpha = c_0 \cdot \pi \cdot c_1 \cdot \pi' \cdot c_2 \cdot \pi'' \ldots c_{\nu-1} \cdot \pi^{(\nu-1)} \cdot c_\nu \cdot \rho$$

donde c_0, c_1, ... $c_{\nu-1}$, c_ν son números enteros positivos de (ν), π, π', π'', ... son números primos de (α), y finalmente ρ es un número de (α) del segundo tipo (para el que por tanto e_{-1} no existe) tal que *no es divisible por ningún número del primer tipo.* Estos números del segundo tipo tienen un carácter sumamente especial, dado que por ejemplo $\omega = \omega \cdot \nu$, donde ν es un número de (ν). Por ello con respecto a ρ no puede hablarse de una descomposición *determinada.* Y por esto es que no puede hablarse propiamente de números primos del *segundo* tipo.

También es digno de notarse que si digo que α es divisible por β estoy afirmando la posibilidad de la ecuación:

$$\alpha = \beta\gamma$$

donde β es el *multiplicando.* Esta manera de fijar el concepto de divisibilidad me parece lícita en la clase numérica (α). [*N. del a.*]

29. Como es bien sabido, esta descomposición [indicada en la nota anterior] fue establecida y demostrada por primera vez en el trabajo publicado en 1897 «Contribuciones a la fundamentación de la teoría de conjuntos transfinitos» (*Ges. Abhandlungen*, p. 343). [*N. de Noether y Cavaillès.*]

y M_2; hay que mostrar que también M y M_1, y por tanto también M_1 y M_2 tienen la *misma potencia*.

Discúlpeme Ud., querido amigo, si le cuento de manera preliminar todo esto, para lo cual tendrá Ud. de momento poco interés; pero si es así, póngalo a un lado y vuelva a estas líneas pasado un tiempo.

En todo caso me complacerá Ud. si me escribe diciendo cómo se encuentra. Con mis amistosos respetos a su señora hermana,

Suyo humildemente
GEORG CANTOR

44. CANTOR A DEDEKIND, TARJETA POSTAL, 6.11.82:

Creo que en mi exposición de ayer cometí una errata, la cual podría dar ocasión a un error.

En el producto:

$$\alpha = \beta\gamma$$

β es para mí el *multiplicador*, γ el multiplicando, y digo que α es divisible por β, si α puede ser representado como un producto en el cual β es el *multiplicador*.

En este sentido debe también entenderse la descomposición que he conjeturado válida en general:

$$\alpha = c_0\pi\, c_1\pi' \ldots c_{\nu-1}\pi^{(\nu-1)}\, c_\nu\, \rho.$$

CORRESPONDENCIA CON KRONECKER, LASSWITZ Y ENESTRÖM (1884-1885)

45. KRONECKER A CANTOR:

Kammer am Attersee [Austria], 21 agos. 1884

Estimado señor colega,

Acabo de recibir su querida carta del 18, reenviada aquí, y me apresuro a confirmar su recepción con agradecimiento. Pienso encontrarme de vuelta en Berlín ya a finales de septiembre, pues esta vez he comenzado mi viaje de reposo nada más acabar las lecciones el 5 del presente. De modo que en octubre me encontrará Ud. en casa, y me alegraré si —de acuerdo con la indicación en su carta— me visita entonces en Berlín y sostiene una conversación científica conmigo, tal como ha sucedido ya con frecuencia en el pasado.

Dice Ud. en su carta que, «a consecuencia de cierta acritud en la valoración de sus trabajos, se ha visto Ud. envuelto en un antagonismo conmigo, del que anhela Ud. con la mayor intensidad verse libre». Naturalmente me agrada mucho esto último, pero debo confesarle francamente que no conocía en absoluto lo primero. Me acuerdo bien de que hace unos años, antes de que W[angerin] ocupase la cátedra allí,[1] tuve ocasión de quejarme de las declaraciones que hacía Ud. respecto a mí por carta dirigida a K[ummer] y Weierstrass, y ello lo hice abierta y directamente en una carta dirigida a Ud. Mas desde entonces no ha faltado ocasión de que volviéramos a encontrarnos en persona —por ejemplo antes de que transcurriera un año, en Halle—, y a juzgar por nuestro encuentro de entonces me pareció que había desaparecido cualquier resto de amargura. ¡Recordará

1. Wangerin tomó posesión de su cátedra en Halle en 1882; véase la carta n° 38 a Dedekind, 7 abr. 1882. [*N. del ed.*]

Ud. muy bien la parte no pequeña que tuve en su desarrollo durante la época de estudiante, y también más tarde en el desarrollo feliz de su carrera académica! Por ello es que no pude sino sentirme sorprendido al encontrar que de repente estaba Ud. lleno de algún recelo contra mí. Mas una vez que me enfrenté por escrito libremente con Ud., para *mí* la cuestión había acabado.

¡Cosa bien distinta es nuestra divergencia en algunas cuestiones científicas! Mas no veo ninguna razón por la que nuestras relaciones personales debieran verse perturbadas de ningún modo por esas divergencias. Cuando hace poco hablé con la Sra. Kowalewski de estas cosas, ella opinó con mucha razón que era como si se hablara de religión. Los asuntos en los que ambos tenemos puntos de vista diferentes quedan casi igual de lejos respecto a la matemática concreta (*sit venia verbo*) como la religión, y si nosotros tres: K[ummer], Weierstrass y yo, representamos desde hace casi treinta años un modelo de unidad pacífica y podemos alegrarnos de una obra común feliz y rica en éxitos, casi nunca perturbada, con ello se demuestra que la pertenencia a tres confesiones distintas no constituye ningún obstáculo a la más íntima unión personal y científica. Tampoco la divergencia en algunos planteamientos científicos ha causado nunca la menor ruptura en nuestras relaciones. ¿Por qué entonces se deja *Ud.*, mi querido colega, conducir a un antagonismo conmigo por divergencias tales?

Dado que Ud. escuchó hace más de veinte años mis lecciones y que también después, permaneciendo en relaciones casi ininterrumpidas conmigo, ha escuchado a menudo mis opiniones, conoce Ud. mejor de lo que podría ahora expresar que, tras haber profundizado en estudios filosóficos muy pronto siguiendo a K., reconocí luego al igual que él mismo la incertidumbre de todas esas especulaciones y me refugié en el puerto seguro de la verdadera matemática. Qué podría haber más natural, sino que me haya esforzado por establecer los fenómenos o las verdades de esta matemática lo más libres posible de aquellos conceptos filosóficos. Por eso he partido de la idea de reducir todo lo que hay en la matemática *pura* a la teoría de los números enteros, y *creo* que esto se logrará plenamente. Mas de momento esto es solo mi *creencia*. Pero donde se ha logrado efectivamente, veo allí un verdadero avance, a pesar de que —o quizá porque— es

un paso atrás hacia lo simple, pero más aún porque ello demuestra que los nuevos conceptos [Begriffsbildungen] cuando menos no son *necesarios*. Pronto haré que se conozca a través de la imprenta lo esencial de mis opiniones, y formularé entonces mis objeciones contra aquella deducción de Stolz —que Ud. conoce por comunicaciones mías en conversación—. ¡Entonces podremos aclarar estas cosas *publice sine ira et studio*! Mas, ¿por qué en el mundo entero debería una tal aclaración perjudicar a nuestras relaciones personales? Si sólo en ocasiones expreso esas objeciones, ello se debe a que no les doy más que un valor muy secundario. Sólo reconozco un auténtico valor científico —en el campo de la *matemática*— a las verdades matemáticas concretas, o por decirlo con más agudeza, «sólo a las fórmulas matemáticas». Sólo ellas son lo imperecedero, como lo muestra la historia de la matemática. ¡Las distintas teorías sobre los fundamentos de la matemáticas (como la de Lagrange) han desaparecido del mundo, pero la resolvente de Lagrange permanece!

Con los mejores deseos, también de mi mujer, a Ud. y los suyos, así como a Heine, de su viejo amigo

KRONECKER

46. CANTOR A KRONECKER:

Friedrichroda, 24 agos. 1884

¡Estimadísimo Señor Profesor!

Su benévola carta del 21, por la que le doy repetidas gracias, me ha llenado de felicidad, ya que entiendo por ella que responde Ud. de la manera más amigable a los deseos que yo expresé en mi escrito del 18.

Me alegro de escuchar que este otoño planea Ud. volver a Berlín ya a finales de septiembre, y espero encontrar así ocasión de discutir con Ud. estos y aquellos asuntos científicos, igual que tuve la suerte de hacer tan a menudo en años pasados y que tanto me ayudó.

Me alegro de saber que tiene Ud. intención de hacer público lo más esencial de sus opiniones sobre cuestiones polémicas [del análisis].

Soy de la opinión de que la mayor parte de aquello que me ha ocupado científicamente en los últimos años, y que reúno bajo la denominación de teoría de conjuntos, no está tan alejado de los requisitos que Ud. impone a la matemática «concreta» como Ud. parece creer. Habrá que culpar a la exposición no demasiado clara de que no haya Ud. advertido lo concreto matemático en mis investigaciones tanto como lo demás, a saber, el contenido filosófico.

Son problemas concretos y, según creo, verdaderamente matemáticos los que me han surgido con los denominados conjuntos de puntos, problemas que en parte he resuelto pero que en su mayoría todavía me ocupan. Están íntimamente ligados a la teoría de funciones y también, creo, a la teoría de números. Aquello en lo que más me agradaría lograr un entendimiento con Ud., es lo que he denominado los números transfinitos de la segunda clase numérica.

Se trata de conceptos, resp. signos o caracteres, que me resultan *imprescindibles* para la *característica* de los conjuntos de puntos. Mi opinión de que dichos conceptos han de concebirse como *números* se funda en la concreta determinación de sus relaciones recíprocas, y en que pueden ser concebidos bajo un mismo punto de vista con los números finitos habituales. Dispongo desde hace ya largo tiempo de una fundamentación de estos números que es algo diferente de la que he dado por escrito en mis trabajos, y que será sin duda más del agrado de Ud.

Parto del concepto de un «conjunto bien ordenado», y llamo conjuntos bien ordenados del *mismo tipo* (o mismo ordinal [*Anzahl*]) a aquellos que es posible correlacionar entre sí unívoca y recíprocamente, *respetando la jerarquía de rango por ambas partes*; y ahora entiendo por número el signo o el concepto para un *tipo concreto* de conjunto bien ordenado. Si nos limitamos a los conjuntos *finitos*, obtenemos de esta manera los números enteros finitos. Mas si pasamos a tener en cuenta la totalidad de los tipos de conjuntos bien ordenados de la *primera* potencia, nos vemos conducidos necesariamente a los números transfinitos de la segunda clase numérica, y por su mediación a la *segunda* potencia. Sería muy de mi agrado poder exponerle todo esto en detalle, ya que estoy convencido de que en tal caso no se le escaparía a Ud. el aspecto matemático concreto del

asunto. Esto me parece tanto más de desear, cuanto que en aquel campo permanecen sin resolver un gran número de cuestiones, para cuya solución se requeriría en mi opinión de su superioridad matemática.

Concluyo por hoy repitiéndole mi agradecimiento sincero

G. CANTOR

NOTA: Cantor envió a Mittag-Leffler el 26 de agosto, «confidencialmente», copias de la carta de Kronecker y su respuesta, comentando:

> No quiero que piense Ud. que voy a humillarme, se trata para mí sólo de restablecer las anteriores relaciones personales cordiales, que se habían perdido no sin culpa mía. Me alegro de corazón de que haya sido yo quien diera el primer paso para la aproximación.
>
> Como podrá Ud. ver claramente en su escrito, Kr. y Kummer han caído en un punto de vista muy sesgado, casi diría que *primitivo*, a la hora de juzgar la matemática, y *mantengo todo lo que de concreto y objetivo he dicho contra este punto de vista en mis* Fundamentos.

47. CARTA AL PROF. KURD LASSWITZ (GOTHA):[2]

15 febr. 1884

Entiendo por *potencia* o *número cardinal* de un conjunto C (que consiste en elementos *c*, *c'*, ... bien diferenciados y conceptualmente separados, y que además ha de ser determinado y acotado) el concepto general o genérico (universal) obtenido al hacer abstracción de las características de los elementos del conjunto así como de todas las relaciones que puedan guardar los elementos, ya sea entre sí, ya con otras cosas, y en especial al abstraer del ordenamiento que pueda reinar entre los conjun-

2. Publicada en «Mittheilungen zur Lehre vom Transfiniten», *Zeitschrift für Philosophie und philos. Kritik*, 91 (1887). Cantor anotaba que «Esta carta reproduce en lo esencial el contenido de la conferencia que di en septiembre de 1883 para la sección matemática de la Reunión de Científicos [*Naturforscherversammlung*] celebrada en Friburgo (Baden)». [*N. del ed.*]

tos, y al reflexionar sólo sobre lo que tienen en común todos los conjuntos que son *equivalentes* con C. Y digo que dos conjuntos C y D son *equivalentes* cuando admiten ser coordinados entre sí unívoca y recíprocamente, elemento a elemento. (Véase el *Journal* de Crelle, t. 84, p. 242). Para ello empleo también la expresión más breve *valencia*, en lugar de potencia o número cardinal. De los conjuntos con igual valencia, digo que pertenecen a la misma clase de potencia. La *valencia* de un conjunto C es pues el concepto general bajo el cual se encuentran todos los conjuntos de la misma clase que C, y sólo estos.

Una de las tareas más importantes de la teoría de conjuntos, que creo haber resuelto en lo esencial en el tratado *Fundamentos para una teoría general de conjuntos*, Leipzig 1883, consiste en el requerimiento de determinar las diferentes valencias o potencias de las variedades [conjuntos] que se encuentran en toda la Naturaleza, en la medida que se revela a nuestro conocimiento. Lo he conseguido formando el concepto general de *enumeración* [Anzahl] *de un conjunto bien ordenado*, o lo que es lo mismo, el *concepto de número ordinal.**

La definición de aquello que entiendo por un conjunto $\mathbb{C}$ *bien ordenado* se encuentra en los *Fundamentos*, p. 4.

A dos conjuntos *bien ordenados* $\mathbb{C}$ y $\mathbb{D}$ los llamo del mismo *tipo* o también *similares entre sí* cuando se pueden relacionar entre sí biunívocamente *de tal modo* que, si c y c' son dos elementos cualesquiera del primero y n, n' los elementos correspondientes del otro, *entonces* la relación de rango de c' a c es siempre la misma que la relación de rango de n' a n. Digo también de dos conjuntos *bien ordenados* $\mathbb{C}$ y $\mathbb{D}$ que satisfacen esa condición, que son *enumerables entre sí.*

Así por ejemplo, los conjuntos bien ordenados

$$(a, a', a'') \text{ y } (b, b', b'')$$

* El concepto de *número ordinal* es un caso particular del concepto de *tipo de orden*, el cual se aplica a todo conjunto *ordenado simplemente* o *múltiplemente*, del mismo modo que el número ordinal a un conjunto *bien ordenado*. El señor C. Gutberlet ha incluido algunas ideas relativas a esto, siguiendo mis deseos y según un manuscrito mío, en su trabajo del *Zeitschr. Philos. u. philos. Kritik* 88, p. 183. [*N. del autor*, añadida sin duda con posterioridad a la fecha de la carta original.]

son del mismo tipo o, lo que significa lo mismo, son enumerables entre sí; e igualmente los conjuntos bien ordenados

$$(a, a', a'' \ldots a^{(\nu)} \ldots) \text{ y } (b, b', b'' \ldots b^{(\nu)} \ldots)$$

y también los siguientes:

$$(a, a', a'' \ldots a^{(\nu)} \ldots c, c', c'') \text{ y } (b, b', b'' \ldots b^{(\nu)} \ldots d, d', d'').$$

Entiendo por *enumeración* o *número ordinal* de un conjunto bien ordenado $\mathbb{C}$ el *concepto general* (concepto genérico, universal) que se obtiene al abstraer de las características y las denominaciones de los elementos del conjunto bien ordenado $\mathbb{C}$, y al reflexionar sólo sobre el orden de rango en el que se encuentran relacionados los elementos; así pues, el *ordenamiento* o *número ordinal* de $\mathbb{C}$ es común a todos los conjuntos bien ordenados *del mismo tipo*, en cierto modo es aquello que es inmanente a todos ellos. Y aquí nos encontramos con el problema de determinar los números ordinales o enumeraciones que se dan en la Naturaleza, y diferenciarlos merced a determinados símbolos de un modo adecuado al asunto. A ello conducen las siguientes definiciones y teoremas:

Sean $\mathbb{C}$ y $\mathbb{D}$ dos *conjuntos bien ordenados* cualesquiera, α y β los números ordinales que les corresponden;

$\mathbb{C}$ unido con $\mathbb{D}$, siguiéndole éste,

es siempre un *conjunto bien ordenado de determinado* tipo, sea γ el número ordinal correspondiente. Definimos que γ es la suma de α y β, $\gamma = \alpha + \beta$, y llamamos a α el augendo, a β el adendo de esta suma. Si α y β son dos números ordinales diferentes cualesquiera, esto es, correspondientes a diferentes tipos, entonces puede demostrarse que *o bien* la ecuación $\beta = \alpha + \xi$, *o bien* la ecuación $\alpha = \beta + \xi$ es resoluble en ξ (o sea, en el *adendo*) y sólo de una manera. En el primer caso llamamos a α menor que β, en el segundo α es mayor que β; a ξ se le llama la diferencia de ambos números; en el primer caso $\xi = \beta - \alpha$, en el segundo $\xi = \alpha - \beta$.

Se demuestra fácilmente que si $\alpha < \beta$, $\beta < \gamma$, entonces también $\alpha < \gamma$. Además es posible mostrar que la ley asociativa siempre es válida:

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma).$$

De modo similar se define el producto de dos números ordinales, donde sin embargo es preciso diferenciar entre el *multiplicador* y el *multiplicando*, ya que en general $\alpha \cdot \beta$ es diferente de $\beta \cdot \alpha$. Por el contrario demostramos aquí, casi diría que de una mirada, que

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) \quad \text{(ley de asociación)},$$

y también que

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \quad \text{(ley de distribución con } \alpha \text{ como multiplicando)}.$$

En los *Fundamentos* he escrito el multiplicador a la *izquierda*, el multiplicando a la *derecha*; pero he podido advertir que el uso contrario, con el *multiplicando primero a la izquierda* y *luego a la derecha el multiplicador*, es el más conveniente y casi indispensable para el desarrollo ulterior de la teoría de los números transfinitos; por esta razón, de ahora en adelante *invierto siempre* la notación de los *Fundamentos* en la medida que tiene que ver con *productos*. Se convence uno de la importancia de esta modificación tan pronto como toma en consideración números transfinitos de la forma α^{β}, para los cuales es válida, según *esta* notación, la ley general: $\alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\gamma} = \alpha^{\beta+\gamma}$. Pero esta misma ley, siguiendo la notación de los *Fundamentos*, tomaría la forma objetable:

$$\alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\gamma} = \alpha^{\gamma+\beta}.$$

Resaltaré aún lo siguiente: si en un conjunto bien ordenado $\mathbb{C}$ dos elementos cualesquiera c y c' intercambian sus puestos en el orden de rango, el tipo no cambia por ello, ni por tanto la «enumeración» ni el «número ordinal». De ahí se deduce que las *transformaciones* de un conjunto bien ordenado que pueden reducirse a una sucesión finita o infinita de *transposiciones* de dos elementos, o sea, todas las alteraciones que surgen por permutación de los elementos, dejan invariante la *enumeración* del mismo. Ahora bien, como en el caso de un conjunto *finito*, si la colección de sus elementos permanece la misma, *toda* transformación puede reducirse a una sucesión de transposiciones, aquí está la razón de por qué en los conjuntos

finitos el número ordinal y el número cardinal coinciden en cierto modo, pues en este caso los conjuntos de la misma valencia tienen siempre un mismo número ordinal, en cualquier forma que sean pensados como conjuntos bien ordenados. Con los conjuntos infinitos, en cambio, la distinción entre *número cardinal* y *número ordinal* resalta de la manera más decidida. Igualmente dependen de aquella circunstancia las leyes conmutativas de la adición y la multiplicación en los conjuntos *finitos*, ya que a partir de ella es muy fácil demostrar que, si μ y ν son dos números ordinales finitos, entonces siempre $\mu+\nu = \nu+\mu$ y $\mu\cdot\nu = \nu\cdot\mu$.

Es preciso adoptar un *nuevo* símbolo para el número ordinal transfinito más pequeño, que es aquel que corresponde a los conjuntos bien ordenados de tipo

$$(a, a', a'', \ldots a^{(\nu)}, \ldots);$$

para ello he elegido la última letra del alfabeto griego, ω.

Por números ordinales de la *segunda* clase numérica entiendo aquellos números que corresponden a conjuntos bien ordenados de la potencia de la *primera* clase numérica $1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots$; dicha colección de números ordinales constituye una *nueva* valencia, concretamente la *inmediatamente siguiente* a la valencia precedente, tal como he mostrado rigurosamente (*Fundamentos*, pp. 35-38). Y el mismo proceso de pensamiento nos conduce a clases numéricas superiores y a las valencias superiores que les corresponden. He ahí una maravillosa armonía, conducente a lo más grande, cuyo desarrollo preciso es el tema de la teoría de números transfinitos.

He creído que debía anteponer todo esto, aunque fuera com la mayor brevedad, para poder entrar en algunos comentarios que encuentro en su escrito. Primero quiero hacerle notar la *generalidad*, *precisión* y *determinación* de mis definiciones de los números; tienen *idéntica formulación*, ya se apliquen a los conjuntos *finitos* o a los *infinitos*. Por ejemplo, todo número transfinito de la segunda clase numérica tiene, según su definición, la *misma determinación, es igualmente completo en sí, como todo número finito.*

A modo de ejemplo, el concepto ω no contiene *nada fluctuante*, nada *indeterminado*, *nada variable*, *nada potencial*, no es

ningún *ápeiron*, sino un *aphorismenon*,[3] y lo mismo vale de todos los demás números transfinitos. Al igual que cualquier número finito, digamos 7 o 3, se *contrapone* a los símbolos indeterminados *x*, *a*, *b* del álgebra literal, con los cuales compara *Usted* en su escrito de manera inapropiada a los números transfinitos. Con ello se aleja Ud. del sentido que tienen para mí los números transfinitos, del mismo modo que lo ha hecho el señor Wundt en la concepción que ofrece de este asunto en su *Methodenlehre, Logik*, t. II, pp. 126-129. La discusión de Wundt muestra que no se ha hecho consciente en forma clara y precisa de la distinción fundamental entre infinito impropio = finito variable = infinito sincategoremático (*ápeiron*)[4] por una parte, e infinito propio = transfinito = infinito completo = *ente infinito* [Unendlichseiendem] = infinito categoremático (*aphorismenon*) por otra parte. De otro modo no hubiera caracterizado de *límite* tanto a *aquél* como a *éste*; límite es siempre algo *fijo* en sí, *invariable*, de ahí que de ambos conceptos del infinito sólo el *transfinito* pueda ser pensado como un *ente* [seiend] y, bajo ciertas circunstancias y en cierto sentido, como un *límite fijo*. Por ello yerra Wundt también al creer que el transfinito no tiene ninguna significación física, mas sí el infinito potencial; en puridad, lo correcto es lo *contrario*, porque el infinito potencial es sólo un concepto auxiliar y relacional, remitiendo siempre a un *transfinito* que está en el trasfondo, sin el que aquél no podría ser ni pensarse. La distinción entre el infinito propio e impropio fue reconocida por los filósofos muy pronto, ya entre los antiguos griegos, si bien no siempre con la misma claridad; también se encuentra expresada con nitidez entre los modernos, con la excepción quizá de Kant, Herbart y los materialistas, empiristas, positivistas, etc. Mas aquí Hegel no merece mención especial, como parece pensar Wundt, pues con Hegel todo es contradictorio, oscuro y confuso, y él mismo llega incluso a elevar la *contradicción* a elemento destacado de su filosofía y propiedad característica de su manera de pensar, cosa en la que *yo*

3. Ambos términos en griego en el original: *ápeiron* designa lo «ilimitado», *aphorismenon* denota lo «separado» y «modificado», lo delimitado.

4. En latín y griego, resp., en el original; del mismo modo que luego aparecen en latín «Transfinitum» y «kategorematice infinitum».

al menos *no* le envidio. A esto se añade que lo que Hegel pueda haber dicho de adecuado acerca de la distinción que hemos discutido, como tantas otras cosas en su caso, lo ha tomado de Spinoza. Pero entre los filósofos se echa en falta el *principio de diferenciación* en lo transfinito, que conduce a distintos números transfinitos y a distintas potencias. La mayoría confunde incluso lo transfinito con el *Uno supremo*, que por su naturaleza es *carente de diferencias*, con el Absoluto, el máximo absoluto, que naturalmente no es susceptible de ninguna determinación y por tanto no puede someterse a la matemática.

En la crítica de Wundt, también es completamente inadecuado que ponga en el mismo plano mis trabajos con las modernas especulaciones llamadas «metamatemáticas»,[5] cuando no tienen ninguna similitud, ningún auténtico punto de contacto, y lo transfinito tampoco debe ser llamado «trascendente» (cuando esto significa más bien algo allende las facultades del entendimiento humano).

...Según Herbart, [*Werke*] t. IV, p. 88 y ss.,[6] el concepto del infinito descansaría «sobre un *límite variable*, que en cada instante puede, o debe, ser llevado más allá». «Prescindir de esta *movilidad* del límite, significa anular el concepto del infinito, significa pensar algo que no es infinito, sino finito. ...» ¿Se ha escapado completamente a la memoria de estos señores que, prescindiendo de los viajes que se tiene a bien realizar en la fantasía o los sueños, para que uno pueda desplazarse o moverse con seguridad es absolutamente imprescindible un *suelo firme*, así como un *camino llano*, que nunca se corte, sino que esté disponible permanentemente allá a donde conduzca el viaje? ... El amplio viaje que Herbart prescribe a su «*límite movible*», según confiesan sus mismas expresiones, *no está* restringido a un ca-

5. En esta época era habitual llamar así a las investigaciones sobre geometrías no euclideas de Lobachevskii, Riemann, Helmholtz, Klein y otros.

6. Este párrafo es un extracto de una larga nota. Cantor entra en una agria polémica contra los «señores herbartianos», y habla incluso del «terrorismo del guía de la escuela [Terrorismus der Schulführer]». Esto contrasta notablemente con la admiración que Riemann le profesó, si bien Riemann prefería francamente los escritos de juventud de Herbart —en los cuales, en particular, habla muy a favor del infinito actual— y no los escritos de madurez que son los citados por Cantor.

mino finito; de modo que su *camino* debe ser *infinito*, y en realidad, dado que *no puede a su vez ser nada variable*, sino que debe permanecer siempre fijo, ha de ser un *camino actualmente infinito*. Con lo cual *todo infinito potencial* (el límite movible) exige un *transfinito* (el camino seguro a recorrer) *y no puede ser pensado sin este último*. Mas ya que nosotros hemos asegurado con nuestros trabajos el amplio camino real [Heerstrasse] de lo transfinito, estableciéndolo firmemente y empedrándolo con sumo cuidado, lo abrimos ahora al tráfico y lo ponemos de buen grado a disposición de todos los amigos del infinito potencial —y muy en particular el «límite» herbartiano, tan amigo de desplazarse— como fundamento férreo y útil para ellos. Con sumo gusto dejamos a este [límite] sin descanso entregado a la monotonía de su destino nada envidiable; que se desplace siempre más allá, de ahora en adelante no habrá de desvanecerse nunca el suelo bajo sus pies. ¡Suerte en el camino!

...No debe requerir pues ninguna otra excusa el que yo haya diferenciado en el mismo inicio de los *Fundamentos* dos conceptos diferentes entre sí *toto genere*, que llamé el infinito impropio y el infinito propio; deben considerarse *no susceptibles* en absoluto de unión y no relacionados entre sí. La unión o confusión de estos dos conceptos absolutamente diferentes, admitida tan a menudo en todas las épocas, es en mi firme opinión la causa de innumerables errores; en particular es aquí donde veo la causa de que los *números transfinitos* no hayan sido descubiertos anteriormente.

Para excluir de antemano una tal confusión, he designado el menor número transfinito con un símbolo *diferente* del símbolo usual ∞, cuyo significado es el infinito impropio, a saber con ω.

En cierto sentido ω puede ser considerado como el límite al que tiende el número variable entero y finito ν, pero sólo en el sentido de que ω es el *menor* número ordinal transfinito, esto es, el menor número *determinado y fijo* que es mayor que *todos* los números finitos ν. Exactamente igual que $\sqrt{2}$ es el límite de ciertos números racionales variables y crecientes, si bien aquí sucede además que la diferencia entre $\sqrt{2}$ y estas fracciones que lo aproximan se hace arbitrariamente pequeña, mientras que $\omega-\nu$ es siempre igual a ω; pero esta diferencia no cambia *nada* en el

hecho de que ω es tan determinado y completo como $\sqrt{2}$, y tampoco cambia nada en el hecho de que ω tiene en sí tan pocas huellas de los números ν que se le aproximan, como $\sqrt{2}$ pudiera tenerlas de sus aproximaciones mediante fracciones racionales.

Los números transfinitos son en cierto sentido *nuevas irracionalidades*, y de hecho, a mi entender, el mejor método para definir los números irracionales *finitos* es perfectamente similar, y aun diría que es en principio el mismo método que he descrito arriba para la introducción de los números transfinitos. Se puede decir sin reparos: los números transfinitos *se sostienen o caen* con los números irracionales finitos; son análogos en su esencia más íntima; pues tanto aquéllos como éstos son configuraciones o modificaciones (*aphorismena*), delimitadas con precisión, del infinito actual.

48. CARTA AL SEÑOR G. ENESTRÖM EN ESTOCOLMO, 4 NOV. 1885:[7]

...Su carta del 31 de oct. de este año, que hoy ha llegado a mis manos, contiene la siguiente cuestión: «¿Habéis visto y estudiado el escrito del abate Moigno intitulado: *Imposibilidad del número actualmente infinito; la ciencia en sus relaciones con la fe* (París, Gauthiers-Villars, 1884)?».[8] Justamente hace unas semanas que me procuré este escrito. Lo que Moigno dice aquí sobre la supuesta imposibilidad de los números actualmente infinitos, y la provechosa aplicación que hace de esta falsa proposición para fundamentar ciertas doctrinas de la fe, me era conocido ya en lo esencial gracias a Cauchy: *Siete lecciones de física general* (París, Gauthier-Villars, 1868). Cauchy parece haber sido conducido a esta especulación, sumamente inusual en un matemático, por el estudio del padre Gerdil. Éste (Jacinto Segismundo, 1718-1802) era una personalidad muy respetable y bien establecida, un filósofo notable, activo como profesor por cierto tiempo en Turín, luego educador del futuro rey Carlos

7. Publicada como «Sobre los distintos puntos de vista en relación al infinito actual», *Zeitschrift für Philosophie und philos. Kritik*, 88 (1886). [*N. del ed.*]

8. Cita en francés en el original. Lo mismo vale para los títulos de las obras siguientes. [*N. del ed.*]

Emanuel IV del Piamonte, posteriormente llamado a Roma por el papa Pío VI en 1776, empleado para ciertos asuntos de la Santa Sede y finalmente elevado a obispo de Ostia y a cardenal. Quizá le resulte conocido como autor de algunos trabajos sobre geometría y sobre cuestiones históricas. En la p. 26, Cauchy hace referencia a un tratado de Gerdil que lleva por título: «Ensayo de una demostración matemática contra la existencia eterna de la materia y del movimiento, deducido de la probada imposibilidad de una sucesión actualmente infinita de términos, ya sea permanentes, ya sucesivos» (*Opere edite ed inedite del cardinale Giacinto Sigismondo Gerdil*, t. IV, p. 261, Roma 1806). El mismo tema se encuentra expuesto por él en «Memoria del infinito absoluto considerado según la magnitud» (*ibid*, t. V, p. 1, Roma 1807).

No me encuentro en oposición de principio a estos autores en la medida en que se afanan por una armonía entre la fe y el saber, mas considero el medio del que hacen uso para ello como algo completamente erróneo.

Si las doctrinas de la fe requiriesen para su apoyo una proposición tan *falsa de raíz* como aquella de la imposibilidad de números actualmente infinitos (que es antiquísima bajo la conocida formulación «numerus infinitus repugnat»; recientemente se encuentra por ejemplo en Tongiorgi: «*Instit. philos.*, t. II, 1.3, a. 4, pr. 10», bajo la forma: «Multitudo actu infinita repugnant»; también puede encontrarse entre otros en Chr. Sigwart, «*Logik*, t. II, p. 47, Tubinga 1878» y en K. Fischer, *System der Logik und Metaphysik oder Wissenschaftslehre*, p. 275, Heidelberg 1865), entonces estaría muy mal encomendada con ella, y me parece muy digno de notarse que santo Tomás de Aquino en I p., q. 2, a. 3 de su *Summa theologica*, donde demuestra con cinco argumentos la existencia de Dios, no hace *ningún* empleo de esta proposición errónea, si bien por otra parte no es contrario a ella; en todo caso le pareció demasiado incierta para este fin. (Compárese Constantin Gutberlet: *Das Unendliche metaphysisch und mathematisch betrachtet*, Mainz 1878, p. 9.) Por alta que sea mi consideración de Cauchy como matemático y físico, por simpática que me resulte su devoción religiosa, y por mucho que en particular me gusten aquellas *Siete lecciones de física general*, al margen del error que estamos discutiendo, me

veo obligado a protestar decididamente contra su autoridad allí donde ha errado.

Hace ahora justamente dos años que el señor Rudolf Lipschitz (Bonn) me hizo notar un paso de la correspondencia entre Gauss y Schumacher, donde el primero se manifiesta en contra de *todo* empleo del infinito actual en la matemática (carta de 12 de julio de 1831); le he respondido extensamente y he rechazado *en este punto* la autoridad de Gauss, que por todos los respectos tengo en tan alta estima, del mismo modo que hoy rechazo el testimonio de Cauchy, y que en mi escrito *Fundamentos para una teoría general de conjuntos*, Leipzig 1883, he rechazado entre otras la autoridad de Leibniz, quien en esta cuestión cometió una notable inconsecuencia.

Si quisiera Ud. revisar con más detalle el escrito recién mencionado (no la traducción en las *Acta mathematica*, t. II, donde sólo se imprime una parte de él) encontraría Ud. que en los §§ 4-8 he respondido en lo esencial a todas las objeciones que se han realizado contra la introducción de números actualmente infinitos. Si bien entonces no me eran conocidos los mencionados escritos de Gerdil, Cauchy y Moigno sobre nuestro tema, con todo las razones aparentes que dan estos autores se ven afectadas tanto como las *petitiones principii* de los filósofos que he citado allí tan ampliamente.

Todas las denominadas demostraciones contra la posibilidad de números actualmente infinitos son erróneas en lo esencial, como se puede mostrar concretamente en cada caso y también deducir de razones generales, debido a que —y aquí radica su proton pseudos—[9] *piden de antemano o más bien imponen a los números en cuestión que cumplan todas las propiedades de los números finitos, mientras que los números infinitos por su parte, si es que han de ser pensables bajo forma alguna, deben constituir un género de números totalmente nuevo por contraste con los números finitos, cuyas características dependen plenamente de la naturaleza de las cosas y han de ser objeto de la investigación, mas no de nuestro arbitrio o de nuestros prejuicios.*

Según he visto recientemente, ya Pascal reconoció lo discutible, si no lo absurdo, de deducciones tales como las que en-

9. En griego en el original: «falsa premisa» (en un silogismo). [*N. del ed.*]

contramos en los escritores mencionados, y por ello habló *a favor* de los números actualmente infinitos, al igual que su amigo Antoine Arnauld, solamente que por otra razón rebatible, en la que no quiero entrar con más detalle aquí, tuvo en demasiado poco al espíritu humano en cuanto a su capacidad de concebir el infinito actual. (*Cf.* Pascal, *Oeuvres completes*, t. I, pp. 302-303, París, Hachette & Co. 1877; y además: *Lógica* [*o el arte de pensar*] de Port-Royal, ed. por C. Jourdin, parte 4ª, cap. 1, París, Hachette & Co. 1877.)

Si nos proponemos agrupar en forma sinóptica los diferentes puntos de vista que a lo largo de la historia se han hecho valer con respecto a nuestro tema, el *infinito actual* (en lo sucesivo denotado I. A. para abreviar), se nos ofrecen diversas maneras de hacerlo, entre las cuales hoy quisiera resaltar sólo una.

Se puede poner en cuestión el I. A. en *tres respectos principales*: *primero, en la medida en que se da in Deo extramundano aeterno omnipotenti sive natura naturante*,[10] donde lo llamo *lo absoluto*; *segundo*, en la medida en que se da *in concreto seu in natura naturata*, donde lo llamo *transfinito*; y *tercero* se puede hacer cuestión del I. A. *in abstracto*, esto es, en la medida en que puede ser concebido por el conocimiento humano bajo la forma del *infinito actual* o, como también lo he llamado, de los *números transfinitos*, o aun bajo la forma más general de los *tipos de orden transfinitos* (arithmoi poetoi o eidetikoi).[11]

Si en primer lugar prescindimos del *primero* de estos problemas y nos restringimos a los dos restantes, surgen de suyo *cuatro puntos de vista diferentes*, los cuales pueden encontrarse realmente sustentados en el pasado o en el presente.

Primero, se puede rechazar el I. A. tanto *in concreto* como *in abstracto*, tal como sucede con Gerdil, Cauchy, Moigno en los escritos citados, con el señor Ch. Renouvier (véanse su *Esquisse d'une classification systématique des doctrines philosophiques*, t. I, p. 100, París, *Bureau de la Critique philosophique*, 1885), y con todos los llamados *positivistas* y su parentela.

10. Expresión de Spinoza: Dios en tanto que distinto del mundo es la «natura naturans», la sustancia activa y creadora; mientras que la «natura naturata» es lo creado, las formas concretas de lo material, lo mental, etc. [*N. del ed.*]

11. En griego en el original: «números creados o ideados». [*N. del ed.*]

Segundo, se puede afirmar el I. A. *in concreto* pero rechazarlo *in abstracto*; esta posición se encuentra, tal como resalté en mis *Fundamentos*, p. 16, en Descartes, Spinoza, Leibniz, Locke y muchos otros. Por nombrar aquí a otro autor reciente, mencionaré a Hermann Lotze, quien en su artículo titulado: «L'infini actuel est-il contradictoire? Réponse à Monsieur Renouvier», en la *Revue philos.* de Ribot, t. IX, 1880 defiende el I. A. *in concreto*; la réplica de Renouvier se encuentra en el mismo tomo de esta revista.

Es posible, *tercero*, afirmar el I. A. *in abstracto* pero negarlo *in concreto*; en esta posición se encuentra una parte de los *neoescolásticos*, mientras otra parte, quizá la mayor, estimulada poderosamente por la encíclica de León XIII, de 4 agosto de 1879: *De philosophia Christiana ad mentem Sancti Thomae Aquinatis Doctoris Angelici in scholis catholicis instauranda*, trata aún de defender la primera de estas cuatro posiciones.

Por fin, *cuarto*, resulta posible *afirmar* el I. A. tanto *in concreto* como *in abstracto*; en este terreno, que considero el *único correcto*, se encuentran bien pocos; quizá soy el primero en el tiempo que defiende la posición de forma plenamente determinada y en todas sus consecuencias, pero sé con toda certeza que ¡no seré el último que la defienda!

Si se quiere tener en cuenta también la posición de los filósofos sobre el problema del I. A. *in Deo*, se obtiene una clasificación de las escuelas en *ochos puntos de vista*, que notablemente parecen tener todos representación. Sólo podrían surgir dificultades para clasificar a un autor en estas *ocho* clases en aquellos casos en que no han tomado posición clara respecto a una o más de las *tres* cuestiones referentes al I. A.

El llamado *infinito potencial* o *sincategoremático* (Indefinitum) no da lugar a una división semejante, y esto se debe a que sólo tiene significado como *concepto relacional*, como una *representación auxiliar* de nuestro pensamiento, pero de por sí no designa ninguna *idea*; si bien ha demostrado, bajo esa forma, su gran valor como medio de conocimiento e instrumento de nuestra mente, a través del cálculo diferencial e integral inventado por Leibniz y Newton, aquel concepto no puede de por sí aspirar a una significación mayor.

Quizá le haya conducido a su pregunta un comentario mío en el artículo «Sobre varios teoremas de la teoría de conjuntos

de puntos» en *Acta Mathematica*, t. VII, p. 123, donde cito entre otros a Cauchy como fiador para mi punto de vista respecto a la *constitución de la materia*; al hacerlo tenía en consideración especialmente aquella parte de mi hipótesis en que afirmo la *estricta puntualidad espacial* o el carácter *inextenso de los elementos últimos*, tal como ha sido enseñada siguiendo a Leibniz por el padre Boscovič en su escrito *Theoria philosophiae naturalis redacta ad unicam legem virium in natura existentium*, Venecia, 1763; y esta consideración se encuentra defendida magistralmente por Cauchy en sus *Siete lecciones* y antes de él por André Marie Ampère (Curso del Collège de France 1835-1836), tras él por Saint-Venant (ver su «Mémoire sur la question de savoir s'il existe des masses continues, et sur la nature probable des dernières particules des corps», *Bulletin de la Société philomatique* de París, 20 enero 1844; también su trabajo más extenso en los *Annales de la Société scientifique* de Bruselas, año 2°), entre nosotros en Alemania ante todo por H. Lotze (*Mikrokosmos*, t. I) y por G. Th. Fechner (ver su *Über die physikalische und philosophische Atomenlehre*, Leipzig 1864). Por contra no puedo dejar de mencionar que Cauchy polemiza, al menos en aquel escrito (y también lo hacen los restantes autores que acabo de mencionar, con la excepción de Leibniz), contra la segunda parte de mi hipótesis, que el *número de los elementos últimos es actualmente infinito*; más arriba he mostrado con qué derecho lo hacen. Algún día mostraré que, sin embargo, Cauchy no permaneció fiel a dicha opinión relativa al I. A. *en otras ocasiones*, como no podía ser menos...

Pese a la diferencia esencial entre los conceptos del infinito *potencial* y *actual* —ya que el primero designa una cantidad finita *variable*, que *crece* más allá de todo límite, mientras el último denota un cuanto *fijo y constante en sí*, pero que está más allá de toda cantidad finita— se encuentra demasiado a menudo el caso de que uno y otro son confundidos. Así, por ejemplo, descansa en la confusión de ambos conceptos la concepción de los *diferenciales* que encontramos a menudo, según la cual serían cantidades *determinadas* infinitamente pequeñas[12] (cuando

12. Por esta época Cantor insistió una y otra vez en la imposibilidad de concebir infinitésimos en sentido estricto, cosa que ha sido considerada como

no son más que cantidades auxiliares *variables*, que se pueden suponer tan pequeñas como se quiera, desaparecen totalmente del resultado final de los cálculos, y por ello ya fueron calificadas de puras *ficciones* por Leibniz, *cf.* la edición Erdmann, p. 436). Si debido a un rechazo justificado de semejante I. A. *ilegítimo* ha tomado forma en amplios estratos de la ciencia, bajo el influjo de las modernas tendencias epicúreas y materialistas, un cierto *horror infiniti* —el cual encuentra su expresión clásica y su mayor apoyo en el mencionado escrito de Gauss—, el concomitante rechazo acrítico del I. A. *legítimo* no me parece un delito pequeño contra la naturaleza de las cosas, que han de tomarse en lo que son. Y cabe concebir dicho comportamiento como una forma de *cortedad de miras* que nos roba la posibilidad de ver el I. A., a pesar de que en forma de su máximo portador, el Absoluto, nos ha creado y nos mantiene, y bajo la forma secundaria del transfinito nos circunda por todas partes e incluso es inherente a nuestro espíritu.

Otra confusión frecuente tiene lugar entre las dos formas del infinito *actual*, pues se mezcla lo *transfinito* con lo *absoluto*, cuando en realidad estos dos conceptos están nítidamente diferenciados, en la medida en que el primero es por cierto *infinito*, pero es aún *susceptible de aumento*, pero el último debe pensarse esencialmente como *no aumentable* y por tanto *no determinable* matemáticamente.[13] Encontramos este error por ejemplo en el *panteísmo*, y constituye el *talón de Aquiles* de la *Ética* de Spinoza, de la que por cierto afirmó F. H. Jacobi que no es posible contradecirla con argumentos de la razón. También se hace notar que, desde Kant, ha tomado carta de naturaleza entre los filósofos la falsa idea de que el *Absoluto* es el límite ideal de lo *finito*, cuando en realidad ese límite sólo cabe pensarlo como un *transfinito*, y por cierto el *mínimo de todos los transfi-*

---

una incoherencia palmaria; los infinitésimos hicieron entrada por estas mismas fechas con el estudio de los sistemas no arquimedianos realizado por Veronese y otros, y en el siglo **20** darían lugar al análisis no estándar.

13. A estas consideraciones subyace la concepción de la matemática como ciencia de las cantidades, que era aún habitual hacia 1800, pero que a finales de siglo estaba francamente superada. Una cantidad se definía precisamente como aquello *susceptible de aumento y disminución*, de ahí que lo que no lo fuera no caería bajo el pensamiento matemático.

nitos (correspondiente al *menor* número suprafinito, que designo con ω). En su *Crítica de la razón pura*, dentro del capítulo sobre las «Antinomias de la razón pura», Kant aplica el concepto del infinito, sin la menor consideración crítica previa, a *cuatro* cuestiones, con el fin de mostrar que pueden con igual rigor ser tanto *afirmadas* como *negadas*. Quizá nunca (incluso considerando el escepticismo pirrónico y académico, con el que Kant tiene tantos puntos de contacto) se ha hecho más por desacreditar la razón humana y sus facultades, que con esta sección de la «filosofía trascendental crítica». En su momento mostraré que dicho autor sólo ha logrado hacer valer sus *antinomias* merced a un empleo *vago y carente de distinciones* del concepto del infinito (si es que bajo circunstancias tales se puede hablar aún de conceptos), y esto sólo lo ha logrado entre aquellos que, al igual que él, prefieren eludir un tratamiento matemático riguroso de tales problemas.[14]

14. Por su interés histórico, incluimos la nota de Zermelo, quien responde a Cantor en un tono no menos cargado de emotividad: «Cantor no parece aquí hacer justicia, en absoluto, a la doctrina kantiana de las "antinomias de la razón pura". Para Kant no se trataba de un rechazo o refutación del *concepto* del infinito, sino de aplicarlo al *todo del mundo*, para establecer el hecho de que la razón humana se ve impulsada por su naturaleza interna tanto a considerar el mundo limitado como ilimitado, finito tanto como infinito —hecho con el que no logrará acabar una teoría matemática como la teoría de conjuntos cantoriana, ni tampoco consideraciones polémicas como las suyas, ciertamente no muy profundas—. Aun aquellos que, como el editor [Zermelo], *rechazan* de plano la teoría kantiana de la matemática, según la cual los teoremas matemáticos se fundarían en la "intuición pura", habrán de conceder que en su doctrina de las "antinomias" alcanza expresión una visión más profunda, una captación de la naturaleza "dialéctica" del pensamiento humano. Quiso un destino peculiar que, precisamente, las "antinomias de la teoría de conjuntos", cuya analogía al menos *formal* con las kantianas no puede negarse, se pusieran en el camino de la difusión y reconocimiento de los logros de Cantor por espacio de toda una generación». [*N. del ed.*]

CORRESPONDENCIA CON DEDEKIND Y HILBERT (1897-1899)

49. CANTOR A HILBERT:

Harzburg, 26 sept. 1897

Dado que me ha contado Ud. que ha entrado en la redacción de los *Math. Annalen*, me gustaría recibir su opinión sobre la publicación del tercer artículo de mi tratado en curso «Contribuciones a la fundament. de la teoría de conjuntos transfin.» Confío en dejar listo el manuscrito durante estas mismas vacaciones; se trata solamente de la cuestión, ¿no resultaría conveniente publicar antes en los *Nachrichten* de Gotinga los resultados más importantes del mismo?

¿Cuándo tendrá lugar la primera sesión de su Sociedad de Ciencias (a la que pertenezco desde hace veinte años como miembro correspondiente)?

Por desgracia, anteayer en el Politécnico de Brunswick me vi obligado a interrumpir nuestra conversación sobre la teoría de conjuntos, debido a que avanzaba la tarde, en el punto en que precisamente surgía en Ud. la duda de si todos los números transfinitos o potencias están contenidos en los alefs, o con otras palabras, si todo **a** o **b** determinado es también un cierto alef.

Es posible *demostrar rigurosamente* que esta pregunta debe responderse *afirmativamente*.

Pues la totalidad de todos los alefs es tal que no puede ser concebida como un conjunto *disponible* [fertig] bien definido y concreto. Si ése fuera el caso, a dicha totalidad debería *suceder* en magnitud un *determinado alef*, que por tanto debería a la vez *pertenecer* a la totalidad (como elemento) y debería *no pertenecer*, lo que constituiría una contradicción.

Ello supuesto, puedo demostrar rigurosamente: «Si un conjunto *disponible*, bien definido y concreto, hubiera de tener un

número cardinal que no coincidiera con ninguno de los alefs, entonces el mismo debería contener subconjuntos cuyo número cardinal sería *cualquier* alef, o con otras palabras, el conjunto debería llevar en sí la totalidad de los alefs».

De ahí es fácil concluir que bajo el supuesto que acabamos de hacer (un *conjunto concreto* cuyo número cardinal no sería ningún alef) también la totalidad de los alefs sería concebible como un conjunto disponible, bien definido y concreto. Pero arriba hemos demostrado que tal no es el caso. Por tanto, todo **a** es siempre un cierto alef.

En particular, también la potencia **o** del continuo lineal es igual a un cierto alef (y espero demostrar que $\mathbf{o} = \aleph_1$).

Y ya de esto se deriva que el continuo lineal, desligado de su interconexión, resulta *enumerable en un sentido superior*, esto es, puede ser representado como un *conjunto bien ordenado*.

Hace ya muchos años que denominé, a las *totalidades* que no podemos concebir como «conjuntos», totalidades «absolutamente infinitas» (ejemplo de ellas es la totalidad de los alefs, según demostramos arriba), y las diferencié nítidamente de los *conjuntos transfinitos*.

¿Dispone Ud. de mi colección de cartas sobre la teoría del transfinito, que apareció hace unos 7 años y fue publicada en el *Zeitschrift zur Philosophie*?[1] Si no es así, me gustaría enviarle un ejemplar de la misma.

Con los mejores deseos de mi mujer y míos

Suyo humildemente

GEORG CANTOR

50. CANTOR A HILBERT:

Halle, 2 oct. 1897

Volviendo a su carta del 27 sept. observo que en ella dice Ud. con *pleno derecho*: «La colección de los alefs puede ser concebida como un conjunto bien definido y concreto, pues dada

1. Cantor, *Abhandlungen*, pp. 370-439 (véanse las cartas n° 47 y 48). Los artículos de 1886 a 1888 fueron publicados separadamente en forma de libro como *Zur Lehre vom Transfiniten* (Halle, 1890). [*N. del ed.*]

una cosa cualquiera podrá en todos los casos determinarse si tal cosa es un alef o no; y nada más puede exigirse de un conjunto bien definido».

All right.

Pero no tiene Ud. en cuenta que en mi escrito de Harzburg empleé también un característico «disponible» y dije:

Teorema

«La totalidad de los alefs no puede ser concebida como un conjunto determinado y *a la vez disponible*».

Aquí es donde debe verse el *punctum saliens*, y aún tiendo a ver en este *teorema plenamente seguro, demostrable rigurosamente* a partir de la *definición de la «totalidad de los alefs»*, la proposición más elevada e importante de la teoría de conjuntos.

Sólo es necesario comprender adecuadamente la expresión «disponible».

Digo de un conjunto que puede ser pensado como *disponible*, y llamo a tal conjunto, en caso de que contenga infinitos elementos, conjunto «transfinito» o «suprafinito», cuando resulta posible sin contradicción (como es el caso con los conjuntos finitos) pensar *todos sus elementos como coexistentes* [zusammenseiend], y por tanto pensar el conjunto mismo como *una cosa en sí* compuesta; o también (en otras palabras) cuando resulta *posible* pensar el conjunto como *actualmente existente* con la totalidad de sus elementos.[2]

51. CANTOR A HILBERT:

Halle, 11 oct. 1897

En su escrito del 27 sept. se ofrece Ud. amablemente a presentar ante la Sociedad Real de Ciencias, para su publicación en

2. En una carta del 6 oct. 1898, donde esencialmente se repiten estas ideas, añade: «*de modo que un "C disponible" puede eventualmente ser considerado como elemento de otro conjunto*». En esa carta (*Briefe*, pp. 393-395) desarrolla con mayores detalles la paradoja de Cantor o de la totalidad de los alefs, y a juzgar por escritos del año siguiente debe de haber logrado al fin convencer a Hilbert. [*N. del ed.*]

los *Nachrichten*, comunicaciones sobre mis trabajos. Me gustaría hacer uso de su invitación, disponiendo en primer lugar, para una de las próximas sesiones de su Sociedad, parte de lo que aparecerá en el tercer artículo de mi trabajo en curso de publicación en los *Annalen*.

¿Será la primera sesión el 23 o el 30 de octubre? ¿Y cuándo es la segunda?

¿Ha recibido Ud. mi carta del 2 de oct., así como el fascículo «Sobre la teoría del transfinito»?

Veo que aún debo responder una cuestión contenida en su carta del 27 sept.

La proposición que afirma que la colección de todas las funciones *continuas*, pero también la de todas las integrables,[3] de una o más variables, tiene la potencia **o** del continuo lineal, se encuentra ya en mis *Fundamentos para una teoría gen. de conjuntos*, p. 46 (*Math. Annalen*, tomo XXI, p. 596), si bien formulada con timidez (con un «debiera»).

Hace ya muchos años que poseo una demostración rigurosa de dicho teorema, basada por un lado en la teoría de las series de Fourier, y por otro en el teorema que se contiene bajo la fórmula

$$\mathbf{o}^{\aleph_0} = \mathbf{o}$$ (*Math. Annalen*, tomo 46, p. 488, *Journal de Crelle*, tomo 84, p. 257).

Para darle a Ud. una idea de dicha demostración, y a fin de ser breve, me limitaré a demostrar una proposición similar más simple, a saber:

«La colección de todas las funciones *analíticas f(u)* de una variable compleja *u* tiene la potencia **o**.»

Demostración: Cada una de las funciones *analíticas f(u) en particular* surge, según la definición de Weierstrass, de infinitos «elementos de función» con la forma

$$S = (a_0+b_0i) + (a_1+b_1i)(u-(c+di)) + \ldots + (a_n+b_ni)(u-(c+di))^n + \ldots$$

3. Aquí Cantor se equivocaba: ya el conjunto de las funciones integrables de Riemann tiene una potencia mayor que **o** (ver Fraenkel, *Einleitung in die Mengenlehre* (1928), 113). [*N. del ed.*]

donde $i = \sqrt{-1}$ y donde c, d, a_n, b_n son magnitudes reales sometidas a la condición de que la serie S converge en un cierto entorno de $u = c+di$, por lo demás arbitrario.

Por tanto la colección

$$\{f(u)\}$$

de todas las funciones analíticas *no* tiene, en todo caso, una potencia *mayor* que la colección de todos los complejos

$$\varepsilon = (c, d, a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots a_n, b_n, \ldots),$$

donde c, d, a_n, b_n pueden tomar todo valor real *sin ninguna limitación*, independientemente unas de otras.

Pero esta colección $\{\varepsilon\}$ tiene la potencia:

$$\{\varepsilon\} = \mathbf{o}^{\aleph_0} = \mathbf{o}.$$

Y como, por otro lado, resulta evidente que la potencia de $\{f(u)\}$ *no* puede ser *menor* que $\mathbf{o}$, se deduce:

$$\{f(u)\} = \mathbf{o}, \qquad \text{c. q. d.}$$

52. CANTOR A HILBERT:

Halle, 10 oct. 1898

A lo que le escribí el día 6 de oct., me gustaría añadir aún algo más, con el ruego de que someta a crítica todo lo que le escribo.

De la definición:

«Se entiende por *conjunto disponible* toda multiplicidad en la cual todos los elementos pueden ser pensados *sin contradicción* como *coexistentes*, y por tanto como una *cosa en sí*.»

se derivan múltiples teoremas, entre ellos los siguientes:[4]

4. Estas proposiciones son notables precedentes de axiomas de la teoría de conjuntos posterior, producto del esfuerzo de Cantor por hacer algo más rigurosas sus intuiciones sobre los conjuntos «consistentes» e «inconsistentes». Son especialmente llamativas las dudas que tuvo sobre el axioma del conjunto potencia $\wp(C)$, el conjunto de todos los subconjuntos de C (véase IV y la carta siguiente). [*N. del ed.*]

I «Si C es un conjunto disponible, entonces también cada subconjunto de C es un conjunto disponible.»

II «Si en un conjunto disponible se sustituyen conjuntos disponibles en el lugar de los elementos, entonces la multiplicidad resultante es un C disponible.»

III «Si de dos multiplicidades equivalentes una es un C disp., entonces también lo es la otra.»

IV «La multiplicidad de *todos los subconjuntos* de un conjunto disponible C es un conjunto disponible.» Pues todos los subconjuntos de C están contenidos en C «a la vez»; la circunstancia de que se recubren parcialmente no es óbice.

Que las multiplicidades «enumerables» $\{\alpha_\nu\}$ son conjuntos disponibles, me parece una proposición *axiomáticamente válida*, en la que descansa toda la teoría de funciones.

Por el contrario, creo que el teorema

«El continuo lineal es un conjunto disponible»

es una proposición *demostrable*, a saber, del modo siguiente:

El continuo lineal es equivalente al conjunto

$$S = \{f(\nu)\}$$

donde $f(\nu)$ puede tomar los valores 0 o 1.

Por comodidad, ¡descartemos la función $f(\nu)$ que es igual a 0 para todo ν!

Afirmo pues que S es un «conjunto disponible».

Demostración. Si denotamos con ν' los valores de ν para los cuales $f(\nu) = 1$, entonces $\{\nu'\}$ es un subconjunto de $\{\nu\}$, e inversamente, a *cada* subconjunto $\{\nu'\}$ de $\{\nu\}$ le corresponde una cierta función $f(\nu)$, es decir, un cierto elemento de S.

La multiplicidad de todos los subconjuntos $\{\nu'\}$ de $\{\nu\}$ es pues equipotente a S.

Pero según la proposición IV, la multiplicidad de los subconjuntos de $\{\nu\}$ es un conjunto disponible; por tanto, lo mismo vale según la proposición III también para S, y para el continuo lineal.

Del mismo modo, el predicado «disponible» debería ser *demostrable* para los conjuntos $\aleph_1$, $\aleph_2$, ...

Antes de proseguir, esperaré a sus observaciones u objeciones a lo dicho hoy y hace cuatro días.

53. CANTOR A HILBERT:

Halle, 12 oct. 1898

En referencia a mi escrito del 10, resulta de una consideración más minuciosa que la demostración del teorema IV no es de ningún modo tan simple. La circunstancia de que los *elementos* de la «multiplicidad de todos los *subconjuntos* de un conjunto disponible» se recubren en parte, la convierte en ilusoria. En la definición de conjunto disponible, resulta *esencial* establecer el supuesto de la *separación* o *existencia independiente* de los elementos.

Confiemos en que nuestra discusión conduzca a una aclaración progresiva de las dificultades.

54. CANTOR A DEDEKIND:

Halle, 28 jul. 1899

¡Estimadísimo amigo!

Su querida carta con deseos cordiales para nuestras dos parejas de novios nos ha alegrado a todos tanto, y a mí en especial me hizo tanto bien recibir nuevamente un signo de vida por parte de Ud. y de su querida hermana, que no puedo menos de comunicarle enseguida esas sensaciones. Qué alegría da escuchar que también este verano respira Ud. el aire puro y vigoroso de Harzburg, que se recrea en las viejas sendas queridas y familiares del bosque, donde tantas veces he tenido la alegría de acompañarle. En Pentecostés de este año estaba allí yo también, con mi hermana menor Margarethe; habitamos cinco días en el hotel Bellevue. Ud. no había llegado aún, pero sus caseros, a quienes pregunté, le esperaban al cabo de una semana.

Me gustaría que de ahora en adelante permaneciéramos en correspondencia regular, tanto tiempo como nos sea concedido; pues con los 54 años que tengo ya tras de mí, uno comienza a pensar en el final; ¡cuántos han llegado al fin mucho antes!

Para satisfacer este deseo amargamente sentido desde hace tantos años, me gustaría ser yo quien comenzara, si es que está Ud. de acuerdo en ello, a darle cuenta de los progresos de mis pensamientos en la teoría de conjuntos y a pedir su opinión respecto a ciertos puntos capitales.

Sabe Ud. que hace ya muchos años que me vi llevado a una sucesión bien ordenada de potencias o números cardinales transfinitos, que llamo los «alefs»:

$$\aleph_0, \aleph_1, \ldots \aleph_\nu, \ldots \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}, \ldots$$

$\aleph_0$ denota la potencia de los conjuntos «enumerables» en el sentido usual, $\aleph_1$ el número cardinal inmediatamente mayor, $\aleph_2$ el inmediatamente mayor, etc.; $\aleph_\omega$ es el que sigue inmediatamente a todos los $\aleph_\nu$ (esto es, el inmediatamente mayor) y es igual a

$$\aleph_0 + \aleph_1 + \ldots + \aleph_\nu + \ldots,$$

etcétera.

La gran cuestión es, si fuera de los alefs existen también otras potencias de conjuntos; hace ya dos años que estoy en posesión de una demostración de que no existe ninguna otra; de modo, por ejemplo, que al continuo lineal aritmético (la totalidad de los números reales) le corresponde un cierto alef como su número cardinal.

Por el contrario, para mí la cuestión Bacon-Shakespeare se ha calmado completamente; me ha costado mucho tiempo y dinero; para llevarla más lejos debería hacer sacrificios aún mucho mayores, viajar a Inglaterra, estudiar los archivos allí, etc.[5]

Con los mejores deseos para Ud. y su Sra. hermana, suyo humildemente

GEORG CANTOR

5. Es notable cómo Cantor espera que Dedekind se pregunte enseguida por el asunto Bacon-Shakespeare, por el que se interesó tanto desde los amargos sucesos de 1884/1885. Precisamente en los años 1896 y 1897 Cantor había hecho publicar tres escritos sobre el tema: *Resurrectio Divi Quirini Francisci Baconi ...*; *Confessio fidei Francisci Baconi ...*; y *Die Rawleysche Sammlung von zweiunddreissig Trauergedichten auf Francis Bacon.* [*N. del ed.*]

55. CANTOR A DEDEKIND:

Halle, 3 agos. 1899

Tal y como le escribí hace una semana, es para mí muy importante conocer su juicio acerca de ciertos puntos fundamentales de la teoría de conjuntos, y le ruego que me disculpe el trabajo que con ello le causo.

Si partimos del concepto de una multiplicidad determinada (un sistema, una colección) de cosas, se me ha hecho evidente la necesidad de distinguir dos tipos de multiplicidades (y me refiero siempre a multiplicidades *determinadas*).

Pues una multiplicidad puede ser de tal naturaleza que el supuesto de una «coexistencia» de *todos* sus elementos conduzca a una contradicción, de manera que es imposible concebir la multiplicidad como una unidad, como «una cosa disponible». A tales multiplicidades las denomino *multiplicidades absolutamente infinitas* o *inconsistentes*.

Resulta fácil convencerse de que, por ejemplo, la «colección de todo lo pensable» es una de esas multiplicidades; más abajo se nos presentarán otros ejemplos.

Si en cambio la totalidad de los elementos de una multiplicidad puede ser pensada sin contradicción como «coexistente», de manera que sea posible reunirlos en «*una* cosa», la denomino una *multiplicidad consistente* o un «conjunto». (En francés y en italiano este concepto puede expresarse acertadamente por medio de las palabras «ensemble» e «insieme».)

Dos multiplicidades equivalentes son o bien ambas «conjuntos», o ambas inconsistentes.

Toda submultiplicidad de un conjunto es un conjunto.

Todo conjunto de conjuntos, si se resuelve estos últimos en sus elementos, es de nuevo un conjunto.

Dado un conjunto C, llamo a aquel concepto general bajo el que cae C y además sólo los conjuntos equivalentes con él, su *número cardinal* o también su *potencia*, y lo denoto por *c*. Nos vemos conducidos al sistema de todas las potencias, del que más tarde se mostrará que es una multiplicidad *inconsistente*, de la manera siguiente.

Se dice que una multiplicidad está «ordenada simplemente» cuando entre sus elementos se da una jerarquización tal, que

de dos cualesquiera de sus elementos uno es el anterior y el otro el posterior, y de tres cualesquiera de sus elementos uno es el anterior, otro el medio, y el restante es el último en rango de entre ellos.

Si la multiplicidad ordenada simplemente es un *conjunto*, entonces entiendo por su *tipo* μ el concepto general bajo el que cae, junto con todos y sólo los conjuntos ordenados *similares* a él. (Empleo el concepto de *similaridad* en un sentido más limitado de lo que sucede en su caso; llamo *similares* a dos multiplicidades ordenadas simplemente, cuando se pueden relacionar entre sí biunívocamente de tal manera que el rango jerárquico de elementos correspondientes es siempre el mismo.)

Una multiplicidad se llama *bien ordenada* cuando satisface la condición de que toda *submultiplicidad* tiene un *primer* elemento; para abreviar, llamo a tal multiplicidad una «sucesión».

Toda parte de una «sucesión» es una «sucesión».

Si ahora una sucesión S es un conjunto, llamo al tipo de S su «*número ordinal*» o brevemente su «*número*»; de modo que, si en lo sucesivo hablo sin más de números, sólo tendré en mente números ordinales, esto es, tipos de conjuntos bien ordenados.

Pongo ahora la vista en el sistema de *todos los números* y lo designo por Ω.

En los *Math. Annalen*, tomo 49, p. 216,[6] quedó demostrado que de dos números cualesquiera α y β siempre uno es el menor, el otro el mayor, y que si de tres números es $\alpha < \beta$, $\beta < \gamma$, entonces también $\alpha < \gamma$.

Por tanto Ω es un sistema ordenado simplemente.

Mas de los teoremas demostrados en el § 13 sobre conjuntos bien ordenados se deduce también con facilidad que toda multiplicidad de números, esto es, toda parte de Ω contiene un *menor* número.

El sistema Ω forma pues, en su orden natural de magnitud, una «sucesión».

Si a dicha sucesión le añadimos como elemento el 0, poniéndolo en el primer lugar, entonces obtenemos una sucesión Ω':

$$0, 1, 2, 3, \ldots \omega_0, \omega_0+1, \ldots, \gamma, \ldots$$

6. *Beiträge* (1897), en los *Abhandlungen* (Cantor 1932), p. 320. [*N. del ed.*]

respecto a la cual es fácil convencerse de que *todo* número γ que aparece en ella es el *tipo* de la *sucesión de todos los elementos que le preceden* (incluyendo al 0). (La sucesión Ω sólo tiene esta propiedad a partir de ω_0+1.)

Ω' *no* puede ser una multiplicidad *consistente* (ni por tanto Ω tampoco); si Ω' fuera consistente, al ser un conjunto bien ordenado le correspondería un número δ que sería mayor que todos los números del sistema Ω; pero en el sistema Ω debe constar también el número δ, dado que contiene a *todos* los números; de manera que δ sería mayor que δ, lo que constituye una contradicción. Así pues:

A. *El sistema Ω de todos los números es una multiplicidad inconsistente, absolutamente infinita.*

Dado que la *similaridad* de conjuntos bien ordenados establece al mismo tiempo su *equivalencia*, a todo número γ le corresponde un determinado número cardinal $\aleph(\gamma) = \bar{\gamma}$, a saber, el número cardinal del conjunto bien ordenado cuyo tipo es γ.

A los números cardinales que corresponden a los números *transfinitos* del sistema Ω en este sentido, los denomino «alefs», y llamo al sistema de todos los alefs τ (*taw*, la última letra del alfabeto hebreo).

Al sistema de todos los números γ que corresponden a uno y el mismo número cardinal $\mathbf{c}$ lo denomino una «*clase numérica*», la clase numérica $Z(\mathbf{c})$. Es fácil ver que en toda clase numérica hay un menor número γ_0, y que existe un número γ_1 que cae fuera de $Z(\mathbf{c})$, tal que la condición

$$\gamma_0 \leq \gamma < \gamma_1$$

dice lo mismo que la pertenencia de γ a la clase numérica $Z(\mathbf{c})$. Toda clase numérica es pues una determinada «sección» de la sucesión Ω.[7]

Ciertos números del sistema Ω forman *cada uno por sí mismo* una clase numérica, son los números «*finitos*» 1, 2, 3, ...,

7. Aquí se emplea nuevamente el teorema ya mencionado de que *toda* colección de números, o sea *toda* submultiplicidad de Ω, tiene un *mínimo*, un *menor número*. [*N. del a.*]

ν, ..., a los que corresponden los diferentes números cardinales «finitos» $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \ldots, \bar{\nu}, \ldots$

Sea ω_0 el menor número transfinito, su alef correspondiente lo denomino $\aleph_0$, de modo que:

$$\aleph_0 = \bar{\omega}_0;$$

$\aleph_0$ es el *menor* alef y determina la clase numérica

$$Z(\aleph_0) = \Omega_0.$$

Los números α de $Z(\aleph_0)$ satisfacen la condición

$$\omega_0 \leq \alpha < \omega_1$$

y quedan caracterizados por ella; aquí ω_1 es el menor número transfinito cuyo cardinal no es igual a $\aleph_0$. Si ponemos

$$\bar{\omega}_1 = \aleph_1,$$

entonces no sólo $\aleph_1$ es distinto de $\aleph_0$, sino que es el alef inmediatamente mayor, ya que es posible demostrar que no hay absolutamente ningún número cardinal que estuviera entre $\aleph_0$ y $\aleph_1$. Y así se obtiene la clase numérica $\Omega_1 = Z(\aleph_1)$ que sigue inmediatamente a Ω_0; abarca todos los números β que satisfacen la condición

$$\omega_1 \leq \beta < \omega_2,$$

donde ω_2 es el menor número transfinito cuyo número cardinal es diferente de $\aleph_0$ y $\aleph_1$.

$\aleph_2$ es el alef que sigue inmediatamente a $\aleph_1$, y determina la clase numérica que sigue a Ω_1 inmediatamente, $\Omega_2 = Z(\aleph_2)$, la cual consta de todos los números γ que son $\geq \omega_2$ y $< \omega_3$, siendo ω_3 el menor número transfinito cuyo número cardinal es diferente de $\aleph_0$, $\aleph_1$ y $\aleph_2$, etc. Resaltaré todavía que:

$$\bar{\bar{\Omega}}_0 = \aleph_1, \qquad \bar{\bar{\Omega}}_1 = \aleph_2, \qquad \ldots \qquad \bar{\bar{\Omega}}_\nu = \aleph_{\nu+1},$$
$$\sum_{\nu' = 0, 1, 2, \ldots \nu} \aleph_{\nu'} = \aleph_\nu,$$

todo lo cual es fácil de demostrar.

De los números transfinitos del sistema Ω a los que no les corresponde como número cardinal ninguno de los $\aleph_\nu$ [con ν

finito], de nuevo hay uno que es el menor, y que llamaremos $\aleph_{\omega_0}$, con el cual obtenemos un nuevo alef

$$\aleph_{\omega_0} = \bar{\omega}_{\omega_0},$$

que también es definible por medio de la ecuación

$$\aleph_{\omega_0} = \sum_{\nu = 0, 1, 2, \ldots \nu} \aleph_\nu$$

y que reconocemos como el número cardinal *inmediatamente mayor* que todos los $\aleph_\nu$.

Uno puede convencerse de que este proceso de formación de los alefs, y de las clases numéricas del sistema Ω que les corresponden, es *absolutamente* ilimitado.

B. *El sistema* ת *de todos los alefs*

$$\aleph_0, \aleph_1, \ldots \aleph_{\omega_0}, \aleph_{\omega_0+1}, \ldots \aleph_{\omega_1}, \ldots$$

constituye, en su orden de magnitud, una sucesión similar al sistema Ω y por tanto igualmente una sucesión inconsistente, absolutamente infinita.

Surge ahora la cuestión de si en este sistema ת están contenidos *todos los números cardinales transfinitos*. Con otras palabras, ¿existe un *conjunto* cuya potencia no sea *ningún alef*?

Esta pregunta debe responderse *negativamente*, y la razón de ello está en la *inconsistencia* que hemos reconocido en los sistemas Ω y ת.

Demostración. Tomemos una cierta multiplicidad M y supongamos que no le corresponde *ningún alef como número cardinal*, de ahí podremos deducir que M debe ser *inconsistente*.

Pues resulta fácil advertir que, bajo el supuesto que hemos establecido, todo el sistema Ω deberá ser proyectable sobre la multiplicidad M, esto es, que debe existir una submultiplicidad M' de M, que es equivalente al sistema Ω.[8]

8. En sus notas editoriales, Zermelo indicaba que aquí estriba la debilidad de la «demostración» de Cantor: no *demuestra* que Ω es proyectable sobre M, «sino que lo toma de una vaga "intuición". ... Se aplica aquí pues la in-

M' es *inconsistente*, porque Ω lo es, de manera que lo mismo debe afirmarse de M.[9]

Con lo cual, toda multiplicidad *consistente transfinita*, todo conjunto transfinito, debe tener un *determinado alef* como número cardinal. Así pues,

C. *El sistema* ℶ *de todos los alefs no es otra cosa que el sistema de todos los números cardinales transfinitos.*

Todos los conjuntos son por tanto, en un *sentido ampliado*, «*enumerables*», y en particular lo son todos los «*continuos*».

Además podemos advertir a partir de C la corrección de la proposición formulada en *Math. Annalen*, tomo 46:[10]

«Si **a** y **b** son números cardinales cualesquiera, entonces o bien $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, o bien $\mathbf{a} < \mathbf{b}$, o $\mathbf{a} > \mathbf{b}$».

Pues los alefs tienen, tal como hemos visto, el carácter de magnitudes.

56. CANTOR A DEDEKIND:

Berlín, 16 agos. 1899

¿Ha encontrado Ud. tiempo para considerar mi reciente comunicación por carta sobre el sistema de todas las potencias

---

tuición temporal para un proceso que va más allá de toda intuición, y se imagina un ser que podría realizar elecciones arbitrarias *sucesivas* para con ellas definir un subconjunto M' de M que precisamente *no es* definible en las condiciones establecidas. Sólo aplicando el "Axioma de Elección", que postula la posibilidad de una elección *simultánea*, y que Cantor emplea por todas partes de modo inconsciente e instintivo, si bien nunca lo formula expresamente, sería posible definir a M' como subconjunto de M. Pero incluso entonces seguiría en pie la objeción de que la demostración opera con multiplicidades "inconsistentes", quizá incluso con conceptos contradictorios, y ya por esto resultaría inadmisible. Objeciones de este tipo fueron las que determinaron al editor, pocos años más tarde, a establecer su propia demostración del teorema del buen orden (*Math. Annalen*, 59, p. 514; 1904) únicamente sobre la base del Axioma de Elección *sin* emplear multiplicidades inconsistentes» (*Abhandlungen*, 451). [*N. del ed.*]

9. Véanse los principios establecidos al comienzo de esta misma carta o también en la n° 52 a Hilbert. [*N. del ed.*]

10. *Beiträge* (1895), en *Abhandlungen* (Cantor 1932), p. 285. [*N. del ed.*]

transfinitas? Espero con impaciencia el reflejo que este asunto pueda experimentar en su espíritu.

Quiero mencionar aún que, implícitamente, donde trato de multiplicidades tengo siempre a la vista multiplicidades de *cosas no ligadas* [unverbundener], esto es, multiplicidades tales que la eliminación de cualquiera de sus elementos, o de varios, no tiene ninguna influencia sobre la subsistencia de los restantes elementos.

Pero ante todo, ¿qué piensa Ud. sobre la distinción entre multiplicidades «consistentes» e «inconsistentes» de cosas *no ligadas*?

57. CANTOR A DEDEKIND:

Hahnenklee [Harz], 28 agos. 1899

En la esperanza de que haya encontrado Ud. tiempo para sumergirse en mis comunicaciones sobre el sistema de todos los números cardinales transfinitos, o potencias, y de sopesar y someter a prueba en su mente el contenido de las mismas, me permitiré tocar aún un punto esencial en el que intencionadamente no entré en la primera entrega, pero que sin duda se le habrá hecho notar por sí mismo (por su ausencia, como si dijéramos). Se debe plantear la cuestión de cómo es que puedo saber que las multiplicidades o sucesiones bien ordenadas a las que les adjudico los números cardinales

$$\aleph_0, \aleph_1, \ldots \aleph_{\omega_0}, \ldots \aleph_{\omega_1}, \ldots$$

son realmente «conjuntos» en el sentido de la palabra que he explicado, esto es, «multiplicidades consistentes». ¿No cabría pensar que ya *estas* multiplicidades fueran «inconsistentes», que sólo la contradicción en la asunción de una «coexistencia de todos sus elementos» *aún no se habría hecho notar*? Mi respuesta a esto es que la pregunta debe *extenderse igualmente a las multiplicidades finitas*, y que una consideración precisa conduce al siguiente resultado: incluso para las multiplicidades finitas *no es* posible llevar a cabo una demostración de su «consistencia». Con otras palabras, el hecho de la «consistencia» de las multiplicidades finitas es una verdad simple e indemostrable, es «*el axioma* de la aritmética» (en el viejo sentido de la pa-

labra). Y del mismo modo, la «consistencia» de las multiplicidades a las que adjudico los alefs como números cardinales es «el axioma de la aritmética ampliada transfinita».

58. DEDEKIND A CANTOR:

Brunswick, 29 agos. 1899

Su visita nos resultará siempre bienvenida tanto a mí como a mi hermana, mas estoy lejos de estar preparado para la discusión de su comunicación, ¡de momento sería de lo más infructuosa! Sin duda lo comprenderá Ud. si le reconozco sin ambages que, aunque he leído varias veces su carta del 3 de agosto, aún no he logrado aclararme respecto a su división de las colecciones en consistentes e inconsistentes; no entiendo qué quiere Ud. decir con la «coexistencia de todos los elementos de una multiplicidad» ni con lo opuesto. No albergo dudas de que un estudio más cuidadoso de su carta pudiera brindarme alguna luz al respecto, ya que tengo una gran confianza en sus profundas y agudas investigaciones. Mas hasta el momento me ha faltado el ocio mental necesario para sumergirme en estos asuntos, ante el flujo ininterrumpido de pruebas de imprenta que debo despachar. Ahora sólo tengo ante mí revisiones, pero prometo que cuando llegue una tranquilidad mayor la emplearé para esa «profundización».

Durante la visita del joven Felix Bernstein en Harzburg, Pentecostés de 1897, me habló de la proposición B. en la p. 7 de la traducción de Marotte, y se sorprendió un poco cuando yo di expresión a mi convencimiento de que aquélla es *fácil* de demostrar con mis medios (*¿Qué son y para qué sirven los números?*); pero no llegamos a hablar más de su demostración ni de la mía. Cuando partió, me puse a ello y construí la demostración que le adjunto de la proposición C., que es obviamente equivalente a la B.[11] Con respecto a si la proposición A se deja obtener

11. No traducimos aquí la demostración, ya que otra casi idéntica —redactada doce años antes, en 1887— puede encontrarse en Dedekind (1998), 155; véase también la p. 115 y la nota 20 en p. 186. Los teoremas citados aparecen en los *Beiträge* (1895), 285, artículo del que Dedekind menciona la versión francesa de 1899: A es el que mencionaba Cantor mismo el 3 de agosto:

con la misma facilidad por mis medios, todavía no lo he investigado. Desde hace años sólo me he ocupado de estas cosas tan interesantes en muy pocas ocasiones, y como mi entendimiento-escalera [*Treppen-Verstand*] ha sido siempre muy lento, no me resultará ahora fácil introducirme en sus investigaciones.

[Seguía una página con el «teorema de la teoría de sistemas» C. Véase la nota al pie y Cantor (1932), 449.]

59. CANTOR A DEDEKIND:

Hahnenklee, 30 agos. 1899

Muchas gracias por su amable escrito, que recibí ayer mismo por la tarde, y en especial por la anotación con la demostración elemental que ha desarrollado Ud., con los medios de su escrito: *Qué son y para que sirven los números*, para el teorema C (y con ello también para el teorema B) de mi tratado. Aparte cuestiones de forma, la misma coincide (si no me equivoco) con la demostración que comunicó por vez primera Schröder en el otoño de 1896 durante la Reunión de Científicos [*Naturforscherversammlung*] en Frankfurt a. M., publicada año y medio después en un tratado de la [Academia] Leopoldina, demostración que fue reproducida independientemente hacia la Pascua de 1897 por el joven señor Felix Bernstein en el seminario de Halle.[12] Sería realmente *muy valioso* si pudiera Ud. demostrar

---

«Si **a** y **b** son números cardinales cualesquiera, entonces o bien **a** = **b**, o bien **a** < **b**, o **a** > **b**». B es el teorema de Cantor-Bernstein: «Si dos conjuntos C y D son tales que C es equipotente a una parte propia D_1 de D, y D es equipotente a una parte propia C_1 de C, entonces C y D son equipotentes». C es el lema: «Si $C_2 \subset C_1 \subset C$, y C_2 es equipotente con C, entonces también C_1 es equipotente con C_2 y con C». [*N. del ed.*]

12. En esto Cantor se equivocaba: la demostración de Schroeder no sólo no era la misma que la de Dedekind, sino que estaba incompleta (razón por la cual hoy ya no se tiende a llamar a este teorema «Schroeder-Bernstein»). Treinta y tantos años más tarde, Zermelo enfatizaba la importancia de la demostración de Dedekind, basada puramente en su teoría general de cadenas, e indicaba que él mismo la había reencontrado y publicado en 1908: «Por qué ni Dedekind ni Cantor se decidieron entonces a publicar esta demostración, en todo caso importante, es algo que hoy no resulta fácil de comprender» (*Abhandlungen*, 451). [*N. del ed.*]

con los mismos medios también el teorema fundamental A (del que se deducen fácilmente como corolarios los restantes: B, C, D).

¡Pongamos en claro lo que resultaría necesario para obtener ese fin, fuera de la demostración ya lograda para B!

Dos conjuntos cualesquiera M y N ofrecen, desde un punto de vista lógico, *cuatro* casos mutuamente excluyentes:

I. Existe una parte de N que es equivalente (o «similar» en su manera de expresarse) con M, pero no existe ninguna parte de M que sea equivalente con N.
II. No existe ninguna parte de N que fuera equivalente con M, sin embargo existe una parte M_1 de M que es equivalente con N.
III. Existe una parte N_1 de N que es equivalente con M, y existe también una parte M_1 de M que es equivalente con N.
IV. No existe ni una parte de N que fuera equivalente con M, ni una parte de M equivalente con N.

Designando con **a** y **b** los números cardinales [de] M y N, tenemos de acuerdo con la definición que yo he establecido de «menor» y «mayor»:

En el caso I: $\mathbf{a} < \mathbf{b}$
En el caso II: $\mathbf{a} > \mathbf{b}$.

Sin embargo, queda por demostrar que *tanto* en el caso III, *como también* en el caso IV, los conjuntos M y N son equivalentes, de modo que $\mathbf{a} = \mathbf{b}$. Para el caso III esto ya lo han logrado Ud., el señor Schroeder y el señor Bernstein por medio de la demostración directa del teorema C. *Queda pues establecer la demostración de la siguiente proposición*: «Si dos conjuntos M y N están constituidos de tal manera que ni M es equivalente con una parte (en su lenguaje, "parte propia") de N, ni N es equivalente con una parte de M, entonces M y N son equivalentes (y por tanto ambos son conjuntos finitos).»

Schroeder declara expresamente que no está en condiciones de demostrar esta proposición, y en cuanto a mí, *tampoco* he logrado su demostración *con los medios elementales* que Ud. ha

empleado para demostrar C y B; sólo puedo demostrarla *indirectamente* a partir de A, proposición de la que he esbozado la demostración en mi carta del 3 de agosto.

60. CANTOR A DEDEKIND:

Hahnenklee, 31 agos. 1899

Habrá recibido Ud. mi carta de ayer. Si me ve Ud. tan celoso por convencerle de la necesidad de la división que estamos discutiendo de los «sistemas» [en dos clases], espero que con ello quede probado mi agradecimiento por los múltiples estímulos y las ricas enseñanzas que he recibido de sus escritos clásicos.

Reconocerá Ud. de la manera más rápida la distinción esencial, profunda y rica en significado entre los sistemas «consistentes» e «inconsistentes», si admite Ud. que le conduzca en la siguiente consideración simple, que es enteramente independiente del aparato descrito el 3 de agosto.

Vamos a asignar los «conjuntos» equivalentes a una misma *clase* de potencia, y los conjuntos no equivalentes a distintas clases, y vamos a considerar el sistema

S de todas las clases pensables.

Entiendo por **a** también [además de la clase misma] el número cardinal o potencia de los conjuntos de la clase de que se trate, ya que es uno y el mismo para todos esos conjuntos.

Sea M_a cualquier conjunto concreto de la clase **a**.

Afirmo que el sistema S, completamente determinado y bien definido, *no es ningún «conjunto».*

Demostración. Si S fuera un conjunto, también sería un *conjunto*

$$T = \sum M_a,$$

realizando esta suma sobre todas las clases **a**; de manera que T debería pertenecer a una cierta clase, digamos la clase $\mathbf{a}_0$.

Pero tenemos el siguiente teorema:

«Si M es cualquier conjunto de número cardinal **a**, de él puede siempre derivarse otro conjunto M' cuyo número cardinal **a'** es mayor que **a**».

He demostrado este teorema para los dos casos que nos resultan más inmediatos, que **a** sea igual a $\aleph_0$ (enumerabilidad en el sentido habitual de la palabra) y que sea igual a **c**, donde **c** denota la potencia del continuo aritmético, por un *procedimiento uniforme* en el *primer* tomo de las noticias de la «Deutsche Mathematiker-Vereinigung». Dicho procedimiento admite ser transpuesto *sin dificultad de ningún tipo* a un **a** arbitrario. El significado de este método puede expresarse simplemente mediante la fórmula:

$$2^{a} > a.$$

Sea pues $\mathbf{a}_0$' cualquier número cardinal mayor que $\mathbf{a}_0$. T que es de potencia $\mathbf{a}_0$ contiene pues como parte el conjunto M_{a_0}, que tiene la potencia mayor $\mathbf{a}_0$', lo que constituye una contradicción.

El sistema T, y con ello también el sistema S, *no son* pues *conjuntos. Existen por tanto* determinadas multiplicidades que *no son también unidades*, esto es, multiplicidades tales que en su caso una verdadera «coexistencia de todos sus elementos» resulta *imposible*. Éstas son las que llamo «sistemas inconsistentes», y las otras en cambio «conjuntos».

61. CANTOR A HILBERT:

Halle, 15 nov. 1899

Muchas gracias por su amable carta de ayer. Hace ya mucho que le habría enviado el prometido número III del trabajo en curso para los *Annalen*, «Contribuciones a la fundamentación de la teoría de conjuntos transfinitos» (número que está fijo y listo salvo en detalles insignificantes), si hubiera recibido una respuesta del señor Dedekind a las 3-4 cartas que le escribí en los meses de agosto y septiembre de este año.

¡Comprenderá Ud. el valor que debo poner en sus respuestas!

Pues veo en su valioso escrito,[13] para mi alegría, que reconoce Ud. la significación que debe tener *precisamente para él*, el

13. Todo indica que la carta de nov. 1899 respondía al envío por parte de Hilbert de su conocido artículo conteniendo un sistema axiomático para los números reales. Las conversaciones con Hilbert animaron el interés de Cantor por buscar axiomas, pero el giro que tomó esta idea en la mente de Cantor

autor del escrito *¿Qué son y para qué sirven los números?*, la publicación abierta del fundamento de mi investigación conjuntista (fundamento que puede encontrar Ud. en los *Grundlagen* publicados el año 1883, especialmente en las *notas al final*, expresado de un modo bastante claro pero intencionadamente *algo oculto*).

Y es que este fundamento mío está *en oposición diametral* al punto clave de sus investigaciones, que debe verse en el supuesto ingenuo de que *todas las colecciones bien definidas o sistemas* son también «*sistemas consistentes*».

Se ha convencido Ud. pues de que el mencionado supuesto de Dedekind es erróneo, cosa que naturalmente yo advertí *nada más aparecer* la primera edición de su escrito antes mencionado, año 1887. Pero, como es comprensible, no quería enfrentarme con un hombre de tan grandes méritos en la teoría de números y el álgebra, sino que preferí esperar una ocasión para discutir la cuestión con él mismo, *¡a fin de que él mismo pudiera realizar y publicar las necesarias correcciones en sus investigaciones!*

Sólo en este otoño me ofreció la ocasión, ya que *por razones que desconozco* me ha guardado rencor durante años, y *casi rompió* la vieja correspondencia que tuvimos de 1871 *hasta 1874.*[14]

Quiero hacer una copia para Ud., querido colega, de la carta principal que le dirigí el 3 de agosto de este año, para enviársela enseguida. Entonces tenga a bien darme su opinión respec-

---

era bien distinto de lo que pretendía Hilbert: en una carta de febrero de 1900 formula axiomas que postulan la «consistencia» de ciertos conjuntos finitos, o (en otros lugares) del conjunto de los números reales. [*N. del ed.*]

14. Hasta donde podemos juzgar, estas manifestaciones de Cantor mezclan lo verdadero y lo falso, dando una muy mala impresión de Dedekind y negando la evidencia de comportamiento impropio por parte de Cantor mismo (ver las cartas de 1873 y el n° 10). Seguramente, en la mente de Cantor se mezclaban los recuerdos de 1874 con los de 1882 (véanse las notas a las cartas n° 39 y 43). Todo ello, y el párrafo que sigue a esta nota (con su retorno a la «manía» Bacon-Shakespeare), sugiere que Cantor se encontraba en una fase maníaca de su enfermedad (*cf.* los comentarios del editor en *Briefe*, 415). La crisis se agravaría debido a la muerte de su hijo pequeño Rudolf el 16 de dic., y duró hasta muy entrado el año 1900; durante ese invierno se liberó a Cantor de dar clases. En conjunto, la historia de las relaciones entre Cantor y Dedekind no puede sino causarnos pena, cierto disgusto, y un sentimiento de piedad por las dificultades personales del genial matemático de Halle. [*N. del ed.*]

to a cómo debo comportarme en este asunto desde ahora. En este invierno estaré muy ocupado, lo que me conviene mucho y corresponde perfectamente a mi natural. Podrá Ud. ver en la página principal del *Vossiche Zeitung*, domingo 12 de nov., que en este invierno impartiré cinco lecciones en Berlín; *igualmente* cinco lecciones en Leipzig sobre el mismo tema [el asunto Bacon-Shakespeare], donde *he llegado al fondo mismo de la cuestión*; *los señores filólogos quedarán maravillados.*

¡Me he propuesto no faltar en París, en agosto de 1900!

Pronto le visitaré en Gotinga.

EPÍLOGO: ECLIPSE Y RESURGIR DE LOS NÚMEROS TRANSFINITOS

El tema que ha constituido el núcleo de esta colección de trabajos de Cantor es su gran contribución creativa al conocimiento matemático: la introducción de los números transfinitos. Como el lector ha tenido ocasión de ver, a mediados de los años 1870 (carta a Dedekind n° 18) Cantor manejaba el concepto de *potencia* o *cardinalidad* de un conjunto infinito, concepto que acabó dando origen a los cardinales transfinitos, los alefs $\aleph_0$, $\aleph_1$, ... $\aleph_\omega$, etc. Pero antes de que se decidiera a considerar el concepto de cardinalidad infinita como base para un sistema numérico y una aritmética (cosa que sólo alcanzó la luz pública en las *Contribuciones* de 1895), vino la introducción de los *ordinales* transfinitos en 1883. Fue esto lo que le llevó a trascender la idea de número tradicional, extendiendo el proceso de contar al campo de los conjuntos infinitos por medio de la idea de conjunto bien ordenado, e introduciendo los números ω, $\omega+1$, ... ω^ω, ... con su aritmética.

Hemos tenido ocasión también de ver cómo estas nuevas ideas, extendiendo y —por así decir— *tensando* el enfoque conjuntista hasta el límite, dieron origen a las primeras paradojas de la teoría de conjuntos. Y el caso es que las paradojas, junto con la posterior axiomatización de la teoría, causaron un eclipse de los números transfinitos. Concluiremos analizando la serie de acontecimientos ligada a ese eclipse y a su resurrección.

Como es bien sabido, la historia de las paradojas fue complicada, como lo fueron, y mucho, las dudas y reflexiones que motivaron entre los matemáticos y filósofos de la época. Es habitual distinguir —siguiendo una propuesta de Ramsey en los años 1920, con precedentes en Peano— entre *paradojas semánticas o lingüísticas* (como la del mentiroso o la de Richard), que tienen su origen en la flexibilidad del lenguaje ordinario, y que

en general se dieron por resueltas mediante la introducción de lenguajes formales; y *paradojas propiamente conjuntistas*, como las de Cantor, Burali-Forti y Russell. Los historiadores han puesto de manifiesto que fue sobre todo Russell quien, en su libro de 1903, identificó públicamente las paradojas como tales y les dio esos nombres. También han señalado que Burali-Forti no dio en realidad con la paradoja que lleva su nombre.

En las cartas de 1897 a 1899, dirigidas a Hilbert y Dedekind, hemos visto cómo la contribución de Cantor al tema fue muy profunda y más matizada de lo que suele pensarse. Ya desde los *Fundamentos* de 1883 Cantor llegó al convencimiento de que la totalidad de los alefs o la totalidad de los ordinales transfinitos no pueden formar un conjunto. O más bien, llegó a pensar que forman «conjuntos» absolutamente infinitos, a los cuales no puede aplicarse el razonamiento matemático (como no puede aplicarse a Dios mismo). En aquel momento, sin embargo, no disponía de *argumentos concretos* que mostraran cómo el supuesto de que tales «multiplicidades» son conjuntos lleva a contradicción. En este sentido, si una primera intuición fundamental le había llegado en 1883, todo indica que fue sólo 13 años más tarde cuando formuló las paradojas. Nos consta que el momento preciso en que las dio a conocer fue el año *1897*, pidiendo a Bernstein que visitara a Dedekind para discutir el tema y discutiendo el asunto en cartas a Hilbert.

Si la obra de Russell fue clave para que el gran público matemático supiera de las paradojas, las cartas de Cantor a Hilbert hicieron que el tema fuera bien conocido en Gotinga. La paradoja llamada «de Cantor» se discute en varias cartas desde 1897, y la carta del 3.08.1899 a Dedekind (nº 59) es una presentación muy cuidada —digna sin duda de publicación como artículo— de la paradoja llamada «de Burali-Forti». Estas cosas fueron conocidas en Gotinga, y llevaron a que el mismo Zermelo descubriera en 1901 la paradoja llamada «de Russell», un año antes que el lógico inglés, aunque no la publicó.

Vale la pena comentar también otro punto. Se ha dicho que, en puridad, no puede afirmarse que Cantor descubriera las paradojas, ya que *para él* no eran contradicciones de la teoría de conjuntos: simplemente mostraban que ciertas cosas que otros, ingenuamente, estaban dispuestos a llamar conjuntos no lo eran

ni podían serlo. Desde los *Fundamentos* de 1883 Cantor desarrolló una concepción de la teoría de conjuntos realista o metafísica: si Dedekind, Frege o Russell veían en los conjuntos una herramienta puramente lógica, Cantor estaba convencido de que la teoría de conjuntos estudiaba objetos que *están ahí*, tanto en la realidad física como en la mente divina. Y las leyes de los conjuntos no eran para él una aplicación simple de principios lógicos establecidos, sino leyes más sutiles, ligadas a aspectos profundos de la realidad física y, más aún, de la naturaleza de Dios mismo.

Es por esto que *para él* las paradojas no eran tales. Sin embargo, las cartas hacen transparente la claridad con la que Cantor entiende que las paradojas son contradicciones estrictas para el enfoque logicista de Dedekind y otros (carta nº 65 a Hilbert). Cantor supo ver con mucha precisión (y para esto contaba con más datos de los que hoy disponemos los historiadores) cómo el principio fundamental que inspiraba el enfoque de Dedekind —igual que el de Frege o el de Russell— era el *principio de comprehensión*: dado un concepto cualquiera, o —recurriendo a la terminología precisa de la lógica moderna— dado un enunciado $\varphi(x)$ con una variable libre, *existe* el conjunto de todas las cosas que satisfacen el concepto, existe $\{x: \varphi(x)\}$. Pero este «axioma», formulado con tal generalidad, es simplemente contradictorio, como lo muestra de la manera más clara y directa la paradoja de Russell y Zermelo.[1] Luego, aunque las paradojas no eran contradicciones para él, Cantor era perfectamente consciente de que lo eran para sus colegas interesados en la teoría de conjuntos: la carta a Hilbert de nov. 1899 no puede ser más explícita a este respecto.

Y esto nos faculta para afirmar que Cantor *sí* que descubrió las contradicciones o paradojas de la teoría de conjuntos. Las descubrió antes que ningún otro y las planteó con mayor claridad que ningún otro, hasta las obras de Russell y Frege publi-

1. En la paradoja de Russell tomamos $\varphi(x) = x \notin x$, de manera que el principio de comprehensión nos brinda el conjunto $R = \{x: x \notin x\}$. El propio R es una de las cosas que pueden o no ser miembros de R, y si $R \in R$, entonces R debe satisfacer el enunciado $\varphi(x) = x \notin x$ que define a R, o sea: $R \notin R$; de donde es fácil ver que $R \in R$ si y sólo si $R \notin R$.

cadas en 1903. Motivó, de hecho, que Hilbert aludiera a las paradojas en sus trabajos de 1900, especialmente a la paradoja de Cantor o del «conjunto» de los alefs, por más que no entrara en una discusión detallada del problema.

Pero las paradojas planteaban también la necesidad de dar una salida teórica al desarrollo de las investigaciones conjuntistas. Cantor tuvo una buena intuición al respecto, la idea de diferenciar entre «multiplicidades consistentes» o conjuntos, y «multiplicidades inconsistentes» (que hoy suelen llamarse *clases* en el lenguaje técnico de la teoría axiomática de conjuntos, clases propias). Y buscando la manera de hacer precisa y manejable esta idea se vio llevado a varios principios muy interesantes, precursores de la teoría de conjuntos de Zermelo y la de Von Neumann. Sin embargo, está claro que no consiguió una articulación teórica suficiente, no consiguió responder a sus propias dudas respecto a la consistencia del enfoque que tendía a desarrollar. Las cartas ofrecen abundante evidencia de ello, a pesar de las declaraciones retóricas en el sentido de que todo lo esencial estaba fijo y bien preparado. Esas dudas de Cantor, fundadas, fueron la causa de que la prometida tercera entrega de las Contribuciones a la fundamentación de la teoría de conjuntos transfinita no viera nunca la luz.

Es transparente también en las cartas que Cantor esperaba mucho de la colaboración de Dedekind a la hora de resolver un problema básico tan delicado. «¡Comprenderá Ud. el valor que debo poner en sus respuestas!», escribía enfáticamente a Hilbert, cuya admiración por las ideas de Dedekind conocía bien el de Halle. Pero la relación con Dedekind se había roto tiempo atrás, a través de una serie de avatares que sólo parcialmente somos capaces de reconstruir: la ruptura en 1874 a raíz de la publicación *impropia* del artículo de Cantor, el restablecimiento de relaciones dos años después, las nuevas muestras de excesivo interés propio por parte de Cantor en 1878, que debieron de alimentar nuevos recelos; y las consecuencias negativas de todo ello, como el fracaso de los planes de Cantor para traer a su colega a Halle en 1881, o la imposibilidad de discutir más acerca de teoría de conjuntos desde 1882. Aquí es donde da la sensación de que puede haber otros elementos que seamos incapaces de reconstruir: si en 1897 Cantor no veía otro recurso para es-

tablecer contacto con Dedekind que la intermediación de su alumno Bernstein, es que la situación había empeorado mucho con respecto a quince años antes; ¿por qué?[2] En todo caso, no es en absoluto descartable que las tensiones que todo esto debió causar en Cantor, las consecuencias a largo plazo del desdichado comportamiento que había tenido en su juventud, tuvieran que ver con la grave crisis mental que le afectó en el invierno de 1899/1900.

Sabemos que Cantor y Dedekind se vieron por última vez el 4 de septiembre de 1899, día en que el primero acudió de visita a Brunswick. Tenemos noticias de ello por una divertida coincidencia: cinco años más tarde el *Calendario Matemático* de Teubner daba aquel día como fecha de la muerte de Dedekind, y éste contestó de buen humor diciendo que quizá día y mes fueron correctos, pero el año seguro que no:

> Según mis propias notas, ese día lo pasé con plena salud y en conversación muy animada sobre teoría y conjuntos con mi invitado a comer y estimado amigo Georg Cantor (de Halle), que en dicha ocasión asestó el golpe de muerte no a mí mismo, sino más bien a un error mío.[3]

El error era, claro está, la concepción lógica de los conjuntos que había acompañado a Dedekind durante media vida: quedaba demostrado que el principio de comprehensión era inconsistente. En 1903 Dedekind rechazó reimprimir su librito, y al res-

2. Mencionaré aquí una hipótesis y un dato: la hipótesis es que quizá Dedekind tuvo una parte relevante en la «revelación» de los números transfinitos en 1882 (véase Ferreirós (1995), pero cabría incluso que las cosas hubieran ido más allá); el dato viene de una carta de Dedekind a Weber en 1888 (Dedekind 1998, 174): tras la publicación de su librito sobre los naturales, Cantor le había hecho notar que ya en 1877 había resaltado la distinción entre lo finito y lo infinito, «pero que no piensa hacer ninguna reclamación de prioridad»; a lo que Dedekind respondía: «tampoco yo tengo la menor gana de una disputa de prioridad». ¿Quizá este cruce en 1888 agravó todavía más las cosas? Muy probablemente. Pero lo que nunca sabremos es en qué pensaba Dedekind exactamente, fuera de lo relativo al artículo de 1874.

3. Citado en E. Landau, «Richard Dedekind – Gedächtnisrede», *Nachrichten der Kön.Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* (1917), p. 54.

pecto comentaba ocho años más tarde, a la respetable edad de ochenta años:

> Todavía hoy no me oculto el significado y la legitimidad parcial de esas dudas [sobre la seguridad de importantes fundamentos de mi concepción]. Pero esto no ha quebrantado mi confianza en la armonía interna de nuestra lógica; creo que una investigación rigurosa de la capacidad creativa de nuestra mente —que a partir de ciertas cosas le permite crear un nuevo objeto definido, su conjunto, necesariamente distinto de cada uno de esos elementos— conducirá sin duda a establecer los fundamentos de mi escrito de manera irreprochable. (Dedekind 1998, 104)

Los descubrimientos de Cantor ponían patas arriba todo el campo de la teoría de conjuntos y los fundamentos de la matemática. El grave problema era cómo reconstruir el magnífico edificio elaborado hasta entonces, sobre fundamentos nuevos y firmes.

Esta cuestión se convirtió en motor de las actividades de un buen número de matemáticos: el lógico Russell, que trabajó para reordenar la fundamentación lógica de Frege, manteniendo el principio de comprehensión pero restringido mediante la teoría de tipos; heterodoxos como Brouwer y otros, que decidieron rechazar buena parte de la matemática conjuntista para formular una matemática pura más estricta y libre de problemas; diversos autores menos conocidos, como puede ser el caso de Julius König, por citar uno importante; el propio Hilbert, que comenzó a buscar maneras de reorganizar las bases de la aritmética y la teoría de conjuntos de tal manera que cupiera demostrar su consistencia; y su alumno Zermelo, que centró su atención en resolver alguno de los problemas fundamentales legados por Cantor.

Ernst Zermelo llegó a Gotinga para habilitarse en 1897, habiendo sido previamente ayudante del célebre físico Max Planck en Berlín. Curiosamente, su campo de actividad era entonces la física matemática: teoría cinética de los gases, hidrodinámica, etc., temas todos a los que se dio mucho impulso en Gotinga

Ernst Zermelo (1871-1953), figura clave en el desarrollo de la teoría de conjuntos durante el siglo **20**.

gracias al empuje de Felix Klein. Fue sólo bajo la influencia de Hilbert que Zermelo se interesó por la teoría de conjuntos, a raíz de escuchar las vivas discusiones sobre fundamentos planteadas en las reuniones de la Sociedad Matemática de Gotinga:

> cuando era *Privatdozent* en Gotinga comencé —bajo la influencia de D. Hilbert, al que he de agradecer la mayor parte de mi desarrollo científico— a ocuparme de las cuestiones de fundamentos de la matemática, y en particular los problemas fundamentales de la teoría de conjuntos cantoriana, que sólo entonces se me hizo consciente en toda su significación gracias al trabajo común de los matemáticos de Gotinga, tan fructífero en aquel tiempo.[4]

Así fue como en 1901/1902 impartió uno de los primeros cursos universitarios dedicados a la teoría de conjuntos, en este caso siguiendo muy de cerca el material de las *Contribuciones* de Cantor. Luego vendrían varias aportaciones relevantes, sobre todo en 1904, año en el que redactó una carta a Hilbert, con vistas a su rápida publicación en los *Math. Annalen*, donde demostraba el Teorema del Buen Orden. Recuérdese que, si todo conjunto puede ser bien ordenado, entonces todos los cardinales transfinitos son alefs. Hilbert había recordado la importan-

4. Citado en G. H. Moore, «Beyond first-order logic: The historical interplay between mathematical logic and axiomatic set theory», *History and Philosophy of Logic* 1 (1980), p. 130.

cia de esta cuestión abierta en su célebre conferencia de París sobre «Los problemas futuros de la matemática» (Hilbert 1900; problema 1). Zermelo logró establecer que el Axioma de Elección y el Axioma del Conjunto Potencia bastan para garantizar la existencia de buenos órdenes para cualquier conjunto dado. Pero la resolución de este problema no trajo sino debates aún más encendidos sobre las cuestiones de fundamentos, dado que muchos no estaban dispuestos a aceptar el Axioma de Elección.

Esto movió a Zermelo, gran amante de las polémicas, a dedicarse plenamente al tema y buscar una solución rigurosa: siguiendo el estilo del trabajo de Hilbert en aquellos años, de lo que se trataba era de encontrar un sistema axiomático para la teoría de conjuntos. Veamos cómo lo plantea el propio Zermelo en su artículo capital de 1908:

> La teoría de conjuntos es la rama de las matemáticas cuya tarea consiste en investigar matemáticamente las nociones fundamentales de «número», «orden» y «función», tomadas en su forma más simple y primitiva, y desarrollar a partir de ellas los fundamentos lógicos de la aritmética y el análisis; así pues, constituye un componente indispensable de la ciencia de las matemáticas. Mas, en el presente, la existencia misma de esta disciplina parece amenazada por ciertas contradicciones, o «antinomias», que pueden ser derivadas de sus principios —los cuales, al parecer, gobiernan necesariamente nuestro pensamiento— y a las que no se ha encontrado todavía una solución enteramente satisfactoria. En particular, a la vista de la «antinomia de Russell» del conjunto de todos los conjuntos que no pertenecen a sí mismos, hoy ya no parece admisible el asignar a un concepto arbitrario, lógicamente definible, un conjunto o clase como su extensión. Por tanto, la definición original de conjunto dada por Cantor, como «una colección de objetos determinados y bien distinguidos de nuestra intuición o de nuestro pensamiento formando un todo», requiere ciertamente alguna restricción; pero no ha sido reemplazada con éxito por otra que sea igualmente simple y que no dé lugar a tales reservas. En estas circunstancias, hoy en día no queda otra opción que seguir el camino inverso: buscar, a partir de la «teoría de conjuntos» tal como nos viene dada históricamente, los principios necesarios para la fundamentación de esta disciplina matemática. ... excluy[endo] todas las contradicciones, pero ... manten[iendo] todo lo valioso de esta teoría.

> En el presente trabajo pretendo mostrar cómo toda la teoría creada por G. Cantor y R. Dedekind puede ser reducida a unas pocas definiciones y a siete «principios», o «axiomas», aparentemente independientes entre sí. La cuestión ulterior, más filosófica, acerca del origen de estos principios y la extensión de su validez no será discutida aquí. No he sido capaz aún de probar rigurosamente que mis axiomas son consistentes, aunque ciertamente esto es esencial; en su lugar, he tenido que limitarme a señalar, aquí y allá, que las antinomias descubiertas hasta ahora se desvanecen todas ellas cuando se adoptan como base los principios aquí propuestos. (Zermelo 1908, 200-201)

El trabajo de Zermelo fue magistral: a través de un análisis lógico detallado de las contribuciones previas de Cantor y Dedekind, y de su propia contribución en 1904, rastrea un conjunto de principios suficientes y coherentes. Investigó su demostración del teorema del Buen Orden, las teorías de Cantor sobre los cardinales y los ordinales transfinitos, la teoría de Dedekind sobre los números naturales; buscó una lista de proposiciones básicas que fueran suficientes para recuperar todos esos resultados. Su labor fue todo un éxito, porque en efecto los axiomas de Zermelo son suficientes para fundamentar la matemática clásica en su conjunto.[5]

Vale la pena indicar brevemente cuáles son los siete axiomas originales de Zermelo. En primer lugar, 1. el axioma de *Extensionalidad*: ya Cantor y Dedekind habían enfatizado que la identidad de un conjunto viene dada estrictamente por sus elementos, de manera que si dos conjuntos M y N tienen los mismos elementos, entonces M = N. Ese principio no necesitaba transformaciones, pero en cambio era esencial reemplazar de algún modo el postulado contradictorio de comprehensión. Como señaló Hilbert en una conferencia de 1904, existía la necesidad de restringir de algún modo el alcance de la partícula lógica «todos», cuando se pasa de un concepto (enunciado con una variable libre) al conjunto de todos las cosas que lo satisfa-

5. Como es sabido, el sistema de Zermelo-Fraenkel incorpora uno o dos axiomas más, aparte de ser un sistema plenamente formalizado en el marco de la lógica moderna.

cen. Zermelo lo resolvió de la manera más simple y directa con su axioma 3. de *Separación*: sólo podremos formar conjuntos por comprehensión *dentro del* marco de un conjunto preexistente; o en su formulación:

> dada una propiedad $\mathbf{P}(x)$ «bien definida» para los miembros de un conjunto M, existe un subconjunto M_P de M que consta de todos los elementos de M que satisfacen $\mathbf{P}(x)$.[6]

Pero este movimiento tiene un coste esencial: a diferencia del postulado de comprehensión, que es excesivamente potente (contradictorio), el axioma de Separación es más bien impotente; comprehensión permitía generar conjuntos a voluntad, dado por ejemplo el concepto de número natural, suministraba ya un conjunto infinito, etc. El axioma de Separación necesita ser complementado con otros principios independientes de existencia de conjuntos. (Por enfatizarlo de otro modo: con el postulado de comprehensión se tenía la sensación de sacar de la nada conjuntos a través de una mera operación lógica, sobre la base de la simple definición de un concepto; pero el axioma de Separación es impotente para generar un universo de conjuntos, y es preciso hacerlo habitar en un entorno conjuntista lo bastante rico.)

Zermelo fue muy consciente de ello, y se preocupó de formular otros cinco axiomas que aseguran la existencia de conjuntos; dos de ellos pueden denominarse axiomas básicos de existencia, y los tres restantes axiomas condicionales. Empecemos mencionando estos: los axiomas del Conjunto Potencia, de Unión y de Elección; en los tres casos se presupone la existencia de cierto conjunto y se establece la existencia de otro. El axioma 4. del *Conjunto Potencia* nos dice que, dado un conjunto M, existe el conjunto $\wp(M)$ que contiene todos y sólo los *subconjuntos* de M. Esta operación es tremendamente potente, tal como nos muestra el teorema de Cantor: el paso de M a $\wp(M)$ es un salto a una cardinalidad mayor. Pensemos que en

6. No entramos aquí a discutir el problema lógico de precisar qué es una propiedad «bien definida», problema que se resuelve con la formalización plena del sistema, tal como propuso Skolem en 1922.

el primer caso matemáticamente interesante, cuando M es el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales, somos ya perfectamente incapaces de inspeccionar uno por uno los elementos de $\wp(\mathbb{N})$. El hecho de que es posible tener dudas serias sobre la admisibilidad de este axioma queda abundantemente establecido ante la evidencia de que ¡el propio Cantor las tuvo! (carta a Hilbert nº 57, 12 oct. 1898).

El axioma 5. de *Unión* es mucho menos controvertido: afirma que, dada una familia de conjuntos M, existe un conjunto $\cup M$ que contiene todos y sólo los elementos de los elementos de M; es aquello a lo que Cantor se refería hablando de reunir los conjuntos de la familia M y «resolverlos» en sus elementos.

El último axioma de existencia condicional es especialmente célebre, aunque como principio abstracto quizá debiera suscitar menos dudas que el 4. Se trata del axioma 6. de *Elección*: dado un conjunto M cuyos elementos son conjuntos no vacíos y disjuntos entre sí, su unión $\cup M$ contiene al menos un subconjunto S_1 que tiene un y sólo un elemento en común con cada elemento de M.[7] Como digo, resulta muy intuitivo razonar de esta manera. Pensemos por ejemplo en un conjunto C dentro del cual se establece una partición en clases disjuntas (digamos, el conjunto de los animales terrestres, dividido en especies): cualquiera razona enseguida que el número de clases (especies) es menor o igual que el número de elementos total de C; pero este argumento, en el caso infinito, requiere ya una aplicación del axioma de Elección. La razón de por qué este axioma levantó tanto revuelo es la aplicación que Zermelo dio de él, usándolo para establecer una proposición muy poco intuitiva y de una manera sorprendente. Zermelo había demostrado en 1904 que el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales tiene un buen orden, pero no daba ni la menor indicación de cómo bien-ordenarlo efectivamente. ¿Era esto hacer matemáticas, o más bien metafísica?

Por último, tenemos los dos axiomas básicos de existencia de conjuntos. Uno de ellos es sumamente modesto: el axioma 2. de *Conjuntos Elementales* afirma que existe el conjunto vacío, y

7. Este axioma ha recibido aquí una reformulación en términos de conjuntos disjuntos, encaminada a hacerlo más intuitivo.

que dadas dos cosas a y b existen los conjuntos $\{a\}$ y $\{a,b\}$. El otro es muy ambicioso, aunque el entrenamiento en la matemática moderna consiste, entre otras cosas, en volverse incapaz de ver lo atrevido que es. Se trata del axioma 7. del sistema, el axioma del *Infinito*:[8] existe al menos un conjunto Z que contiene el conjunto vacío, y que con cada elemento a contiene también el conjunto $\{a\}$. Basta un momento de reflexión para darse cuenta de que este postulado exige que el conjunto Z contenga *al menos* los siguientes elementos:

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \ldots$$

que de acuerdo con el axioma de Extensionalidad son todos distintos. No es difícil darse cuenta de que el subconjunto de Z formado *sólo* por esos elementos puede sin ningún problema hacer el papel de los números naturales, al menos dentro del sistema axiomático.

Existe una tensión entre el desarrollo conceptual de una teoría y su formulación axiomática: el esfuerzo por sentar las bases axiomáticas de la manera más simple y económica induce una cierta artificiosidad en la elaboración de la teoría. Esto es fácil de advertir en el caso de la teoría de conjuntos, si comparamos el modo de trabajar de Zermelo con las elaboraciones previas de Cantor y Dedekind.[9] El ejemplo más a mano nos lo da el propio axioma del Infinito de Zermelo, que acabamos de formular. Dedekind había elaborado una aproximación sumamente general y francamente conceptual, indicando que un conjunto C cualquiera es infinito si existe una aplicación φ y un subconjunto propio $C' \subset C$, tales que $\varphi: C \to C'$ es una biyección. El axioma de Zermelo no hace más que dar un ejemplo absolutamente particular de ello, un ejemplo adecuado a la economía del sistema axiomático: la aplicación φ será $a \mapsto \{a\}$, que es biyectiva gracias al axioma de Extensionalidad, y el conjunto Z incluirá a $\emptyset$ para garantizar que la imagen $\varphi(Z)$ de aquella aplicación es un sub-

8. Zermelo indica que este axioma se debe esencialmente a Dedekind (Zermelo 1908, 204).

9. De Cantor, véase de nuevo su carta del 3.08.1899, por ejemplo.

conjunto *propio* de Z. Pero la ganancia en economía axiomática viene al precio de una pérdida en penetración conceptual.

Ese mismo fenómeno encontró expresión muy particular en el asunto del papel concedido a los números transfinitos dentro de la teoría axiomática. El hecho histórico, por sorprendente que pueda parecer, es que las paradojas y la axiomatización de Zermelo motivaron un *eclipse* de los números transfinitos por espacio de aproximadamente dos décadas. El objetivo del sistema axiomático de Zermelo era garantizar la existencia de un dominio conjuntista lo bastante rico para que en él se pudieran desarrollar los resultados previos de la teoría de conjuntos. Era necesario disponer de un conjunto equivalente al de los números naturales, y de principios de formación de conjuntos que permitieran definir los números reales, etc. Era preciso que los principios permitieran el estudio de todo tipo de relaciones de orden, así como la definición de toda la panoplia de funciones del análisis, etc. Zermelo lo logró, pero a un cierto precio. En su artículo de 1908, desarrollaba análogos de los resultados cantorianos sobre las potencias o cardinalidades transfinitas, pero lo hacía sin alefs, sin números transfinitos: presentaba esos resultados como proposiciones acerca de la equivalencia o equipotencia entre conjuntos. Del mismo modo, los resultados de la teoría de ordinales se obtenían directamente como proposiciones acerca de las propiedades de los conjuntos bien ordenados, sin introducir los ordinales transfinitos.

Así fue como los alefs y los omegas se quedaron fuera del sistema axiomático que, andando los años, muchos se acostumbraron a considerar como «el fundamento» de toda la matemática.[10] El triunfo de Cantor, al pasar por la criba de las paradojas, conllevaba un cierto fracaso: sus queridas criaturas ω y ω^{ω}, $\aleph_0$ y $\aleph_1$ (que en puro lenguaje cantoriano deberíamos llamar sus «magnos descubrimientos», revelados por la voz de Dios o la Naturaleza) se quedaban en el terreno de los conceptos interesantes pero imprecisos, que tienen correlatos precisos pero en

10. En 1922, el gran lógico Skolem no podía ocultar su asombro de que tantos buenos matemáticos vieran el sistema de Zermelo como el fundamento, de ahí que pasara a la carga con una crítica rigurosa a las pretensiones de la axiomática, basada en la lógica matemática.

Un joven János von Neumann (1903-1957), hacia la época de sus contribuciones clave a la teoría de conjuntos.

un lenguaje mucho más engorroso, el de la teoría axiomática. La situación llegaba a ser incluso un tanto inquietante para los matemáticos más cuidadosos, ya que esos números y la inducción transfinita eran muy empleados en el álgebra moderna de los años 1920. Kuratowski llegó a titular un largo y cuidadoso artículo, «Une méthode d'élimination des nombres transfinis des raisonnements mathématiques» (1922); unos años más tarde, en 1935, las trazas de los transfinitos desaparecerían del álgebra merced al conocido lema de Zorn.

Pero una situación tan triste no podía durar mucho. Ya lo dijo Hilbert en 1925: «del paraíso que Cantor creó para nosotros, nadie podrá expulsarnos», y los alefs y omegas son ingrediente esencial de dicho paraíso. Por eso vino al rescate una figura legendaria de la matemática del siglo **20**, János von Neumann, que entonces era un jovencito de veinte años, pero que pronto se movería en el entorno de Gotinga colaborando con la escuela de Hilbert en temas de fundamentos. Von Neumann preparaba su muy innovadora tesis conteniendo un nuevo sistema axiomático para la teoría de conjuntos, distinto del de Zermelo. En 1923 la sección científico-matemática de las *Acta Litterarum ac Scientiarum* de la Universidad Regia de Francisco-José en Hungría publicaba, en alemán, su artículo «Sobre la introducción de los números transfinitos».[11]

La novedad del trabajo de von Neumann fue establecer un modo de incorporar la idea cantoriana de los números ordinales directamente, sobre la única base de los axiomas de la teoría

11. Traducción inglesa en Van Heijenoort (1967), 347-354.

de conjuntos. En su artículo de 1923 presentaba la cuestión al margen de sistemas axiomáticos, desde un punto de vista «ingenuo», pero era perfectamente consciente de que la importancia del asunto era su aplicabilidad a dichos sistemas (tanto al de Zermelo–Fraenkel, como al original sistema nuevo en el que entonces trabajaba von Neumann). ¿Cuál era la idea clave? Resulta sencillo exponerla.

Ya Cantor había llamado la atención sobre el hecho de que, si se toma el 0 como primer número de la serie de los ordinales, cada ordinal (representa el «tipo de orden» del conjunto de los ordinales que le preceden: α es el ordinal de $\{x: x < \alpha\}$, considerado en su orden natural de magnitud. Por ejemplo, $\omega+1$ es el ordinal de $\{1, 2, 3, ..., \omega\}$. Por otro lado, Zermelo había identificado los números naturales con los conjuntos $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\{\varnothing\}\}$, ... (Naturalmente, con esto no quiere decirse que el número 1 es «realmente» el conjunto$\{\varnothing\}$, idea que solo cabría calificar de tontería; lo que sucede es que la operación $a \rightarrow \{a\}$ tiene las propiedades de la función sucesor, y por tanto *puede* —a los efectos del trabajo axiomático— identificarse con la función sucesor.)

Pues bien, considerando las dos ideas, la de Cantor y la de Zermelo, conjuntamente, surge la ingeniosa idea de von Neumann. Partamos del ordinal 0, identificado a la Zermelo con $\varnothing$, y decidamos que cada ordinal es el conjunto de todos los que le preceden. De esta manera nos vemos llevados a la sucesión:

$$
\begin{aligned}
&0 = \varnothing,\\
&1 = \{\varnothing\},\\
&2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\},\\
&3 = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing,\{\varnothing\}\}\},\\
&\ldots\\
&\omega = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing,\{\varnothing\}\}, \{\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}, \ldots\}\\
&\omega+1 = \{0, 1, 2, 3, \ldots, \omega\}^{12}\\
&\ldots
\end{aligned}
$$

La pequeña modificación de von Neumann tiene efectos muy deseables dentro del artificioso orden axiomático de las co-

12. Lo escribimos en esta forma abreviada para facilitar la lectura, pero el lector debería pensar aquí en 0, 1, ... ω sustituidos por sus definiciones conjuntistas explícitas, las que se dan arriba.

sas: los ordinales pueden considerarse como conjuntos bien ordenados (siendo su relación ordenadora ϵ, la simple pertenencia conjuntista), y cada ordinal α es a su vez un conjunto bien ordenado de tipo α, o sea, un representante de toda una clase de conjuntos.[13]

Lo que tenemos ante nosotros ya no son los viejos números ordinales de Cantor, que éste insistía en concebir como *conceptos* bajo los que «caen» los distintos tipos de conjuntos bien ordenados. Nos encontramos ahora ante los *ordinales* de la teoría de conjuntos axiomática, a menudo llamados ordinales de von Neumann, que no son otra cosa que conjuntos (cuya existencia viene garantizada en cada caso por los axiomas de la teoría), conjuntos especialmente adecuados para representar al concepto de Cantor por las razones antes indicadas. Con esta y otras innovaciones por el estilo, el matemático húngaro —que acabaría nacionalizándose estadounidense y contribuyendo al desarrollo de los ordenadores, la bomba atómica, la teoría cuántica, la carrera armamentística y la teoría económica— hizo mucho por ayudar al surgimiento de la teoría de conjuntos actual.

Llegamos así al final de este volumen. Sin embargo, parece adecuado ponerle colofón con una última pieza de correspondencia: una carta fechada en Budapest, a 15 de agosto de 1923, donde el desconocido y genial von Neumann informa a su colega de 52 años Zermelo de las ideas que está desarrollando para su tesis.[14] La carta es un verdadero *ex ungue leonem*:

> ¡Muy estimado señor Profesor!
>
> Me permito enviarle el trabajo adjunto. Le ruego tenga a bien leerlo, para comunicarme su opinión al respecto.
>
> El objeto de dicho trabajo es la axiomatización de la teoría de conjuntos. El estímulo para ello he de agradecérselo enteramente a su trabajo sobre los «fundamentos de la teoría de conjuntos».

13. Conviene añadir que los ordinales de von Neumann habían sido prefigurados ya unos años antes por el propio Zermelo, en trabajos de aprox. 1915 que quedaron inéditos, y por el ruso afincado en Suiza Dimitry Mirimanoff (1917).

14. Bueno, a decir verdad, para una de las dos tesis doctorales que presentaría en 1925, siendo la segunda en el campo de la ingeniería química (!).

Sólo en los siguientes puntos esenciales me he separado de aquél:

1. El concepto de «definido» no se introduce explícitamente. Pero se ofrecen los esquemas admisibles para la formación de funciones y conjuntos.
2. Se añade el «axioma de reemplazo» de Fraenkel. Resulta necesario (entre otras cosas) para poder establecer la teoría de los números ordinales.
3. Se admiten los conjuntos «demasiado grandes» (por ejemplo, el conjunto de todos los conjuntos que no se pertenecen).

   Creo que esto es necesario para poder formular el «axioma de reemplazo».

   Mas para evitar las paradojas, se admite que todos los conjuntos («definidos») sean *elementos* de conjuntos, pero se declara a los conjuntos «demasiado grandes» incapaces de serlo.

En las dos primeras partes del trabajo se discute toda esta axiomática, y se lleva a cabo la derivación de los elementos de la teoría de conjuntos conocida.

Esto se hace de manera bastante prolija y detallada, a fin de ofrecer una discusión clara de los métodos empleados. Como en su mayor parte se trata sólo de la derivación formal de teoremas conocidos, fue necesario manejar muchas cosas triviales.

En la exposición, sólo resultan *nuevos* (si ignoramos algunas pequeñeces) los siguientes puntos:

1. La teoría de los números ordinales (parte dos, capítulo dos).

   He logrado establecer los números ordinales sobre la única base de los axiomas de la teoría de conjuntos. La idea básica es la siguiente:

   Cada número ordinal es el conjunto de todos los precedentes. De modo que (poniendo 0 para el conjunto vacío)

   $0 = 0,$
   $1 = \{0\},$
   $2 = \{0, \{0\}\},$
   $3 = \{0, \{0\}, \{0,\{0\}\}\},$
   ...

$\omega = \{0, \{0\}, \{0,\{0\}\}, \{0,\{0\},\{0,\{0\}\}\}, ...\}$
$\omega+1 = \{0, \{0\}, \{0,\{0\}\}, \{0,\{0\},\{0,\{0\}\}\}, ..., \{0, \{0\}, \{0,\{0\}\}\}, \{0,\{0\},\{0,\{0\}\}\}, ...\}$
...
...

(Para los números positivos finitos, la regla dice pues: $x + 1 = x + \{x\}$.)

Esta teoría tiene sentido también dentro de la «teoría de conjuntos ingenua». (Tratada ingenuamente, aparecerá pronto en la revista de la Universidad de Szegedin.)

2. La manera de introducir el teorema del Buen Orden. (Axioma IV 2). Uno de los axiomas, el IV 2, establece cuándo un conjunto es «demasiado grande» (esto es, incapaz de ser elemento) de la siguiente manera:

   Un conjunto es «demasiado grande» cuando y sólo cuando es equivalente al conjunto de todas las cosas.

   Este axioma abarca obviamente el «axioma de separación» y el «axioma de reemplazo» de Fraenkel. Pero contiene también, cosa que en cierto modo resulta extraña, el teorema del Buen Orden.

   La demostración procede más o menos así: el conjunto de todos los números ordinales (que se puede definir sin más) conduciría a la antinomia de Burali-Forti, por tanto es «demasiado grande».

   Por tanto es equivalente al conjunto de todas las cosas. Pero esto nos da inmediatamente un buen orden para el conjunto de todas las cosas.

3. La definición de lo finito (parte dos, capítulo tres, § 5a) es, hasta donde yo sé, nueva.

   Es independiente del concepto de orden, por una parte, y del principio de elección, por la otra. En todo caso, ello resulta indiferente en esta exposición, ya que aquí el principio de elección se introduce implícitamente (en el axioma IV 2, junto con otros requisitos). Por eso mismo en ningún caso aíslo de los restantes los teoremas que dependen de él.

   ...

A diferencia de las dos primeras partes, las cuales creo poder considerar como aproximadamente acabadas, la tercera parte entra en una serie de cuestiones cuya solución todavía no me resulta clara.

Se trata de la estructura del sistema axiomático, donde surge una buena cantidad de problemas inesperados, y creo que nada exentos de interés.

Le quedaría muy agradecido, señor Profesor, si quisiera Ud. dedicar su atención también a esta parte, a fin de comunicarme su opinión al respecto.

...

Agradeciéndole de antemano, quedo

Respetuosamente suyo
HANS VON NEUMANN

ÍNDICE

NOTA PRELIMINAR, *José Manuel Sánchez Ron* 7

INTRODUCCIÓN
José Ferreirós

1 EL CONTEXTO DE LOS *FUNDAMENTOS*, O LA GÉNESIS DEL «PARAÍSO» 11
2. UN ESBOZO BIOGRÁFICO 17
3. EL DOMINIO DE LO TRANSFINITO 29
4. LA HÉLICE VIRTUOSA: ORDINALES Y CARDINALES 40
5. LA DÉCADA DEL DISTANCIAMIENTO: 1885-1895, Y MÁS ALLÁ 52
6. LAS PARADOJAS DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS 65
7. NOTA SOBRE LA TRADUCCIÓN 73
BIBLIOGRAFÍA 76
SOBRE LA ORGANIZACIÓN DE LOS TEXTOS 79

FUNDAMENTOS
PARA UNA TEORÍA GENERAL DE CONJUNTOS

PREFACIO 83
TEXTO 85
ANOTACIONES 137
NOTAS DEL EDITOR 145

SOBRE UNA CUESTIÓN ELEMENTAL
DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS (1892) 159

CORRESPONDENCIA
DE CANTOR CON DEDEKIND, HILBERT Y OTROS

CORRESPONDENCIA CON RICHARD DEDEKIND (1872-1874). 165
SOBRE UNA PROPIEDAD DE LA COLECCIÓN DE TODOS LOS NÚMEROS REALES ALGEBRAICOS (1874) 179
CORRESPONDENCIA CON DEDEKIND (1877-1882) 185
CORRESPONDENCIA CON KRONECKER, LASSWITZ Y ENESTRÖM (1884-1885) 231
CORRESPONDENCIA CON DEDEKIND Y HILBERT (1897-1899) 251

EPÍLOGO:
ECLIPSE Y RESURGIR DE LOS NÚMEROS TRANSFINITOS..... 273